

**QUATRE THEOREMES CONCERNANT DES
PARTIES STABLES FINIES DE GROUPE
ET L'ORDRE DE CHAQUE ELEMENT D'UN GROUPE FINI**

Soit $(G, .)$ un groupe fini ou non et $(H, .)$ une partie stable finie de ce groupe.

- La restriction de la loi de groupe à H est évidemment associative puisque la loi de groupe l'est.

- « a » étant un élément quelconque de H , $a.a$; $a.a.a$; et en général $na \in H$ ($n \in \mathbb{N}^*$) puisque H est stable. Or, comme nous l'avons établi dans la proposition II du texte « [Arithmétiques de groupes](#) », on pourrait engendrer ainsi une infinité d'éléments distincts deux à deux appartenant à H , à moins qu'il n'existe n_i tel que $n_i a = e$ (élément neutre de $(G, .)$), ce qui est nécessaire puisque H est finie. Donc :

- $e \in H$ et $n_{i-1}a$ est le symétrique de « a ». « a » étant un élément quelconque de H , on en déduit que :

- Tout élément de H admet un symétrique dans H .

Conclusion : $(H, .)$ est un sous-groupe de $(G, .)$ et donc :

Théorème : Toute partie stable finie d'un groupe quelconque est un sous-groupe de ce groupe.

Si $(G, .)$ est lui-même un groupe fini, $(H, .)$ est aussi une partie finie et donc :

Corollaire : Toute partie stable d'un groupe fini est un sous-groupe de ce groupe.

*

Puisque, dans un groupe fini, la composition multiple d'un même élément quelconque aboutit, à plusieurs reprises, à l'élément neutre, on peut, pour chaque élément, considérer le plus petit nombre de fois qu'il apparaît lorsqu'on le compose avec lui-même pour obtenir l'élément neutre. Ce nombre est appelé *l'ordre* de cet élément (Exemple : un élément « a » tel que le plus petit composé $aaa = e$ est dit d'ordre 3). Par convention il est admis que l'ordre de l'élément neutre est égal à 1.

Soit un groupe fini $(G,.)$ d'élément neutre e et « a » un élément d'ordre n de ce groupe, donc $na = e$. Considérons l'ensemble $H = \{a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a, e\}$. Tous ses éléments sont engendrés par « a » et cet ensemble est stable. En effet : $xaya = (x+y)a$ (par exemple $2a3a = 5a$).

* Si $x+y \leq n - 1 \Rightarrow (x+y)a \in H$

* Si $x+y > n - 1$, il existe un ou des composés $na = e$ qui réduiront le composé $(x+y)a$ à l'un des éléments de H , ceci grâce à l'associativité de la loi de groupe (Ex : $(n+2)a = na2a = e2a = 2a$). Donc $(H,.)$ est une partie stable de $(G,.)$; elle est donc un sous-groupe de $(G,.)$ en vertu du corollaire précédent et son cardinal est donc un diviseur de celui de G en vertu du [théorème de Lagrange](#) précédemment démontré. Or, le cardinal de H est égal à n . On en déduit donc que :

Théorème (encore attribué à Lagrange) : L'ordre de chaque élément d'un groupe fini est un diviseur du cardinal de ce groupe.

Il s'ensuit évidemment que l'ordre d'un élément d'un groupe fini ne peut jamais être supérieur au cardinal de ce groupe.

D'autre part, on peut déduire, *a contrario*, de ce dernier théorème que :

Corollaire : Si un nombre naturel n n'est pas un diviseur du cardinal d'un groupe fini donné, aucun élément de ce groupe ne peut être d'ordre n .

*
* *