ANALYSE D'UNE FONCTION REELLE
DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES DONT TOUTES
LES DERIVEES PARTIELLES SONT CONSTANTES

I). Cas d'une fonction de deux variables :

Soit une fonction réelle $F(x, y)$ définie sur tout R et admettant sur tout R des dérivées partielles telles que :

$$\delta F/\delta x = F'_x = A \quad (1) \quad \text{et} \quad \delta F/\delta y = F'_y = B \quad (2)$$

A et B étant des constantes par rapport aux deux variables.

D'après l'égalité (1) : $F(x, y) = Ax + H(y)$ (3) (En effet, H doit être une constante par rapport à x, mais fonction de y, sans quoi F ne serait pas fonction des deux variables).
De cette égalité (3) nous tirons : $\delta F/\delta y = F'_y = H'(y)$.
Or, d'après l'égalité (2) : $F'_y = B \Rightarrow H'(y) = B \Rightarrow H(y) = By + K$ (4).
(K est une constante par rapport à y mais aussi par rapport à x puisque H(y) ne dépend pas de x).

Donc, d'après les égalités (3) et (4) :

$$\boxed{F(x, y) = Ax + By + K} \qquad \text{d'où :}$$

<u>Lemme</u> : Une fonction réelle de deux variables réelles, partout définie sur R et admettant des dérivées partielles constantes selon chaque variable sur tout R est de la forme : $F(x, y) = Ax + By + K$, A et B étant respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y, et K la constante égale à $F(0, 0)$.

II). Cas d'une fonction de n variables :

Soit une fonction réelle $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie sur tout R et admettant sur tout R des dérivées partielles constantes par rapport à chaque variable.
Désignons par A_1 la dérivée partielle de F par rapport à x_1 :
$F'_{x1} = A_1 \Rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_1x_1 + G(x_2, \ldots, x_n)$ et $F'_{x2} = G'_{x2}$
$F'_{x3} = G'_{x3}, \ldots, F'_{xn} = G'_{xn}$.
Puisque toutes les dérivées partielles de F sont constantes, toutes celles de G (qui sont celles de F moins une) le sont aussi. Si nous établissons que G est de la forme : $G(x_2, \ldots, x_n) = A_2x_2 + A_3x_3 + \ldots + A_nx_n + K$, alors la fonction F sera aussi de la forme : $F(x_1, \ldots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + K$, c'est-à-dire que cette forme sera passée de n-1 à n variables.

Or, nous avons démontré cette forme pour une fonction de deux variables (lemme précédent), donc elle devient vraie aussi pour une fonction de trois variables et ainsi, par récurrence, pour 4, 5, 6 ….et n variables. D'où :

<u>Théorème</u> :

Une fonction réelle de n variables réelles, partout définie sur R et admettant des dérivées partielles constantes selon chaque variable sur tout R, est de la forme :

$$F(x_1, \ldots\ldots, x_n) = \Sigma_{(\text{de } 1 \text{ à } n)} A_i x_i + K$$

A_i étant respectivement les dérivées partielles par rapport aux x_i et K la constante égale à F(0,….,0).

<u>Remarque</u> : Il est évident que ceci reste vrai si l'ensemble R est réduit, pour la définition de la fonction et pour ses dérivées partielles constantes, à un intervalle (a, b).

*

*   *