# A PROPOS DES MATRICES TRIANGULAIRES SELON LEUR DIAGONALE SECONDAIRE ET DES MATRICES DIAGONALES SELON CETTE SECONDAIRE

* Est-il possible qu'une matrice triangulaire selon sa diagonale secondaire soit orthogonale ?

Si elle était orthogonale son inverse serait sa transposée, or il est évident que la transposée d'une telle matrice est une matrice de même type. Et nous avons démontré (« matrices triangulaires par rapport à leur diagonale secondaire ») que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure gauche, lorsqu'elle existe, est une matrice triangulaire inférieure droite, donc pas sa transposée (à moins que cette matrice ne se résume à sa seule diagonale). Réciproquement, l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure droite, lorsqu'elle existe, est une matrice triangulaire supérieure gauche, donc, là encore, pas sa transposée (à moins que cette matrice ne se résume à sa seule diagonale). D'où :

| |
|---|
| Théorème : Aucune matrice triangulaire selon sa diagonale secondaire et ne se résumant pas à cette seule diagonale ne peut être orthogonale. |

* Matrices diagonales selon leur diagonale secondaire :

- Produit de telles matrices de même ordre :

Une telle matrice peut être considérée comme, tout à la fois, matrice triangulaire supérieure gauche et matrice triangulaire inférieure droite. D'après les théorèmes concernant les produits de telles matrices, **le produit de deux matrices diagonales secondaires est** donc à la fois une matrice triangulaire supérieure et inférieure, c'est-à-dire **une matrice diagonale classique**.

Exemple avec deux matrices d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13}b_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31}b_{13} \end{pmatrix}$$

| |
|---|
| Théorème : le produit de deux matrices diagonales secondaires de même ordre est une matrice diagonale classique de même ordre. |

- Inverse d'une de ces matrices :

Là encore une telle matrice pouvant être considérée comme, tout à la fois, triangulaire supérieure gauche et triangulaire inférieure droite, et d'après les théorèmes concernant les inverses de telles matrices, son inverse, lorsqu'elle existe, est une matrice triangulaire à la fois inférieure droite et supérieure gauche, donc une matrice diagonale secondaire. D'où :

Théorème : L'inverse d'une matrice diagonale secondaire, lorsqu'elle existe, est encore une matrice diagonale secondaire (de même ordre).

Exemple d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/a_{31} \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 1/a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* <u>Cas particulier d'une matrice diagonale secondaire dont tous les éléments de cette diagonale sont égaux à 1</u> :

Une telle matrice est évidemment orthogonale, donc son inverse est sa transposée. Or sa transposée est elle-même, **donc une telle matrice est aussi son inverse**.

Exemple d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons, au sujet de cette matrice particulière, que, dans un repère orthonormé (i, j, k), elle transforme ce repère ainsi : (k, j, i), c'est-à-dire qu'elle caractérise la symétrie par rapport au plan bissecteur de l'angle dièdre [(i, j) ; (j, k)] et, la symétrie-plan étant involutive, ceci confirme que cette matrice est sa propre inverse.

Une telle matrice, d'ordre n, entraîne l'inversion totale de toute suite de n éléments, disposés en vecteur colonne, sur laquelle elle agit. La signature de cette permutation est alors le déterminant de cette matrice.

*

* *