QUELQUES CONSEQUENCES DE
LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

I). <u>Nouvelles formules. Simultanéité. Intervalles spatio-temporels</u> :

§ 1). <u>Nouvelles formules</u> :

Tout d'abord, remarquons que les équations 1 et 4 de la transformation de Lorentz sont également valides pour exprimer x et t en fonction de x' et t', en tenant compte du fait que la vitesse de K par rapport à K' est égale à –v. Donc :

$$x = (x' + vt')/a \quad \text{et} \quad t = (t' + vx'/c^2)/a.$$

(le coefficient « a » ayant toujours la valeur : $(1 – v^2/c^2)^{1/2}$).

Dans la démonstration « axiomatique » que je donne des 4 équations de cette transformation (on peut la retrouver ici), nous avons d'abord obtenu les deux relations suivantes :

$$x' = ax – vt' \quad \text{(relation B)} \quad \text{et} \quad x = ax' + vt \quad \text{(relation C)}.$$

Ces deux relations sont « mixtes », dans le sens où chacune d'elles exprime x' ou x en fonction d'une coordonnée de K et d'une autre de K'. On peut également obtenir de telles relations mixtes pour exprimer t et t'. Elles se révèleront utiles.

- Exprimons t' en fonction de t et x' :

D'après la 4ème relation de Lorentz : $t = (t' + vx'/c^2)/a \iff at = t' + vx'/c^2 \iff$

$$\boxed{t' = at – vx'/c^2 \quad \text{(relation J)}}$$

- Exprimons t en fonction de t' et x :

Il est évident que, d'après l'<u>axiome 2</u>, nous devons trouver : $t = at' + vx/c^2$. Vérifions-le :

D'après la 4ème relation de Lorentz : $t' = (t – vx/c^2)/a \iff at' = t – vx/c^2 \iff$

$$\boxed{t = at' + vx/c^2 \quad \text{(relation L)}}$$

§ 2). <u>Simultanéité de deux événements ayant lieu en des localisations différentes</u> :

La 4ème équation de la transformation de Lorentz montre que deux événements de localisations différentes, simultanés pour un observateur situé dans l'un des deux repères K et K', ne sont pas nécessairement simultanés pour un observateur situé dans l'autre repère. En effet, deux cas peuvent se produire :

1) Les deux événements simultanés dans l'un des deux repères ont la même abscisse. Dans ce cas, ils sont également simultanés dans l'autre repère et y ont la même abscisse.
2) Ces deux événements n'ont pas la même abscisse. Dans ce cas, s'ils sont simultanés dans l'un des deux repères, ils ne le sont pas dans l'autre, puisque la mesure du temps dans un repère dépend de l'abscisse de l'événement dans l'autre. Exemples :

a) Deux événements, d'abscisses différentes x_1 et x_2, sont simultanés dans K, c'est-à-dire qu'ils sont repérés au même instant t par des observateurs situés dans K. Pour des observateurs situés dans K', ces deux événements ont lieu aux instants t'_1 et t'_2 tels que : $t'_1 = (t - vx_1/c^2)/a$ et $t'_2 = (t - vx_2/c^2)/a$. Puisque x_1 est différente de x_2, il est évident que $t'_1 \neq t'_2$.
b) Symétriquement, si deux événements d'abscisses x'_1 et x'_2 différentes dans K' sont simultanés pour des observateurs situés dans K', c'est-à-dire ont lieu au même instant t' dans K', ces deux événements ont lieu, pour des observateurs situés dans K, aux instants t_1 et t_2 tels que : $t_1 = (t' + vx'_1/c^2)/a$ et $t_2 = (t'_2 + vx'_2/c^2)/a$. Puisque $x'_1 \neq x'_2$, il est évident que $t_1 \neq t_2$.
(Remarquons d'ailleurs que ce « b » était prévisible en vertu de l'axiome 2.)

Il découle de ceci que la simultanéité de deux événements (et évidemment de plus de deux) est une notion relative. Seule la simultanéité en un même point est universelle, ce qu'affirme l'axiome 3.
Albert Einstein (qui n'avait alors que 26 ans !) a eu le génie de faire de cette constatation l'un des préalables de sa Théorie de la relativité restreinte dans son mémoire du 30 juin 1905 (lequel peut être appelé dans sa traduction française des § 1, 2, 3 et 4, ici). D'autre part, dans un petit livre de vulgarisation qu'il a publié quelques années après (lequel vient d'être réédité chez Dunod : « La Théorie de la relativité restreinte et générale »), il prend, pour illustrer ceci, l'exemple d'observateurs qui se trouvent, l'un dans un train animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et l'autre sur le talus de la voie de chemin de fer. Si deux éclairs lumineux brefs jaillissent à chaque extrémité du train et sont simultanés pour un observateur situé sur le talus à mi-distance des deux extrémités du train, ils ne le sont pas pour un observateur situé au milieu de ce train car celui-ci avance en direction de l'éclair jailli en tête tandis qu'il s'éloigne de celui jailli en queue. On remarquera en passant que ceci implique que la vitesse relative de la lumière jaillie de la tête du train par rapport à l'observateur situé au milieu du train et observée par l'observateur situé sur le talus est plus grande que celle jaillie de la queue du train. (Mais l'observateur dans le train ne s'en rendra pas compte car, s'il mesure la vitesse de ces deux rayons lumineux, il la trouvera toujours égale à « c » et en déduira que l'éclair de tête a précédé l'éclair de queue). Dans sa démonstration développée dans le mémoire précité, Einstein utilise plusieurs fois cette variation de la vitesse

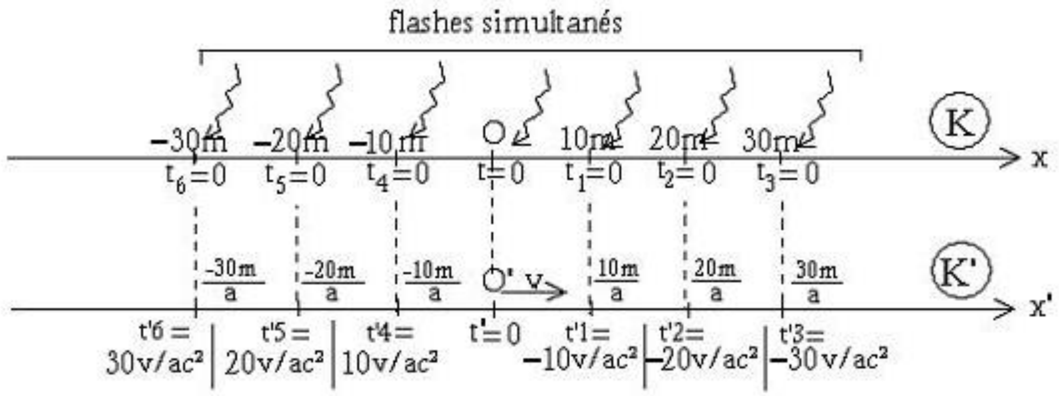
relative de la lumière observée de ce qu'il appelle « le système stationnaire », notamment dans le § 3 (c – v et c + v).
On pourrait supposer – et ceci ne serait pas absurde *a priori* – que, puisque la mesure du temps n'est pas la même dans le train et sur le talus, la constatation que l'observateur situé sur le talus fait de ce que les deux rayons lumineux issus de la tête du train et de la queue n'arrivent pas simultanément à l'observateur situé au milieu du train n'est pas confirmée par ce dernier. Peut-être que lui perçoit ces éclairs comme simultanés. Mais analysons bien ce que cela voudrait dire : cela signifierait que les deux rayons lumineux parviendraient simultanément à cet observateur situé au milieu du train, selon sa constatation personnelle. Donc il s'agirait, dans le « repère train », d'une coïncidence spatio-temporelle, laquelle, selon notre axiome 3, est universelle, c'est-à-dire que cette simultanéité apparaîtrait aussi à l'observateur situé sur le talus, lequel a cependant perçu l'éclair jailli de l'avant du train illuminer l'observateur mobile avant celui jailli de la queue du train.

Ceci nous montre avec quelle précision il faut raisonner sur cette théorie de la relativité restreinte et l'intérêt qu'il y a à partir d'axiomes précis.

Cette relativité de la simultanéité (hors le cas de la coïncidence spatio-temporelle) pose évidemment le problème de la synchronisation des horloges dans chaque repère (l'usage est de désigner par « horloge » tout instrument de mesure du temps, qu'on choisira le plus précis possible évidemment).
Dans la démonstration axiomatique (qu'on peut retrouver ici) je ne donne aucune indication sur la synchronisation des horloges autre que leur initialisation à zéro en O et O' lorsque ces deux origines sont confondues, ou lorsque ces horloges sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe des abscisses. Par contre, Einstein, dans le mémoire précité, prend grand soin de définir celle-ci et considère en outre que l'instant de tout événement est mesuré dans chaque repère selon l'horloge immédiatement située près de lui (ceci évidemment pour éviter les délais de transmission d'un signal, aussi rapide soit-il). Il envisage que cette synchronisation des horloges, dans chaque repère, est faite selon des signaux optiques et pose pour principe qu'elle est, traduite dans le langage mathématique actuel, une *relation d'équivalence*, c'est-à-dire qu'elle est *(réflexive), symétrique et transitive* (cf. § 1 de son mémoire). La méthode optique qu'il préconise (on peut revenir à son mémoire en cliquant ici) est purement théorique et peu applicable dans la pratique.
Concrètement, étant donné que la vitesse de la lumière dans le vide – et des ondes électromagnétiques en général – est une constante universelle, on peut synchroniser deux horloges d'un même repère par un signal radio, le temps de transit de ce signal étant pris en compte d'après la distance séparant ces deux horloges.

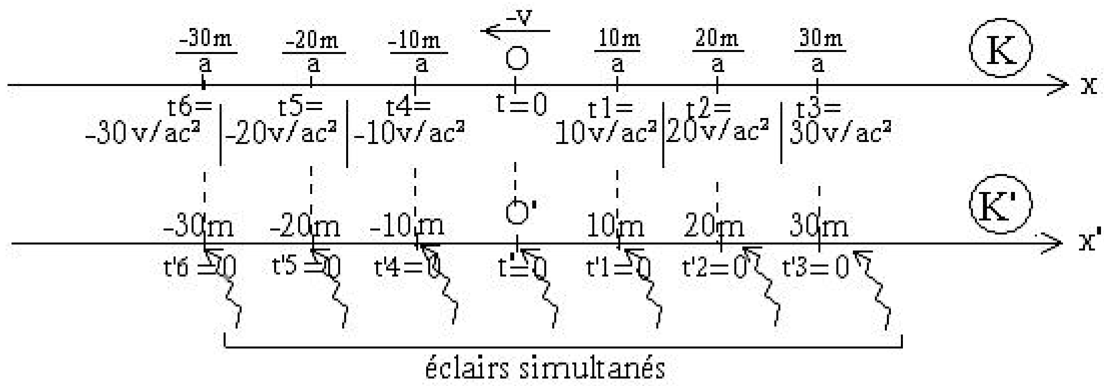
Pour illustrer la relativité de la notion de simultanéité et sa conséquence sur la synchronisation des horloges, observons les deux exemples suivants :

1) Les origines des deux repères K et K' sont en coïncidence et les horloges respectives de ces deux repères ont été synchronisées par des signaux optiques, ou en général électromagnétiques, en tenant compte de l'axiome 5 (invariance de c dans le vide). Supposons, qu'alors qu'a lieu cette coïncidence, des flashes lumineux jaillissent en O et tous les 10 m le long de l'axe des abscisses de K et soient simultanés pour des observateurs immobiles dans le repère K. Cela signifie que ces flashes auront tous lieu à l'instant t = 0 mesuré dans K, quelles que soient leurs abscisses. Mais, dans K', ces flashes ne seront pas perçus comme simultanés par des observateurs liés à ce repère. En effet, en utilisant la première et la quatrième relation de Lorentz, nous trouvons dans K' les abscisses et les temps suivants :



Nous remarquons que, pour les observateurs de K' immobiles sur la partie positive de l'axe des abscisses, les intervalles spatiaux entre les éclairs sont supérieurs à 10 m (car a < 1) et les instants où ont lieu ces éclairs sont de mesures négatives, c'est-à-dire précèdent, pour ces observateurs, la coïncidence de O et O'. Ces observateurs seront d'autant plus enclins à le penser que, s'ils sont informés (nous reviendrons ultérieurement sur cette question de l'information) par les observateurs de K des abscisses de ces éclairs, lesquelles sont inférieures à celles qu'ils mesurent eux-mêmes, ils auront tout lieu d'admettre que O' est alors en amont de O. Et cette avance sur la coïncidence est d'autant plus grande qu'on s'éloigne de O'. D'autre part, l'observateur qui, dans K', se trouve à l'abscisse (10/a) m, par exemple, et qui est donc en coïncidence avec l'observateur situé dans K à l'abscisse 10 m au moment où surgit le flash (coïncidence spatio-temporelle) pensera que son horloge retarde par rapport à celle de ce dernier. Et il en sera ainsi pour tous les observateurs situés sur la partie positive de l'axe des abscisses de K'. Par contre, sur la partie négative de cet axe, l'ordre est renversé, c'est-à-dire que tous les observateurs liés à K' penseront que leurs horloges avancent par rapport à celles liées à K, et ceci d'autant plus qu'ils sont plus éloignés de O'.

2) En reprenant les mêmes conditions initiales , c'est-à-dire les deux repères ayant leurs origines confondues, supposons maintenant que des flashes lumineux jaillissent en O' et tous les 10 m sur l'axe des abscisses de K' et soient simultanés pour des observateurs immobiles dans K'. Ils ne seront pas perçus comme simultanés par les observateurs liés à K et ceux-ci mesureront les abscisses et les instants donnés par le schéma suivant :



Nous pouvons constater que les horloges des observateurs immobiles sur la partie positive de l'axe des abscisses de K' retardent encore par rapport à celles des observateurs correspondants immobiles dans K. Il y a donc non contradiction avec l'exemple précédent.

De ces deux exemples, nous pouvons conclure : **qu'à l'instant initial aux origines (où t = t' = 0 en O = O'), les horloges situées sur l'axe des abscisses d'un repère, sur la partie (à partir de l'origine) orientée dans le même sens que le vecteur vitesse de ce repère, retardent par rapport aux horloges correspondantes de l'autre repère, tandis que celles situées sur la partie de l'axe des abscisses (à partir de l'origine) de sens opposé au vecteur vitesse de ce repère avancent par rapport à leurs correspondantes dans l'autre repère**. (Remarquons en passant que ceci est en conformité avec notre axiome 2 de symétrie).

De ceci nous pouvons également conclure que, **si le synchronisme des horloges est une relation d'équivalence dans chaque repère, il ne l'est pas d'un repère à l'autre car il n'est pas transitif dans ce cas**.

Comme nous constatons une fois de plus que les instants où ont lieu des événements ont chacun une mesure qui dépend de son abscisse, nous conviendrons par la suite de signaler entre parenthèses l'événement considéré, ou le point où il se produit, dans ses mesures d'instant et d'abscisse. Ainsi, par exemple, un événement ayant lieu en un point M de l'espace, d'abscisse x(M) et à l'instant t(M) selon K, aura pour abscisse et instant dans K' :

$$x'(M) = [x(M) - vt(M)]/a \quad \text{et} \quad t'(M) = [t(M) - vx(M)/c^2]/a$$

Ces précisions permettront d'éviter d'embarrassantes contradictions.
Par contre, lorsque nous parlons de plusieurs événements ayant lieu à un instant donné dans un repère, cela signifie que les observateurs situés dans la proximité immédiate de chacun de ces événements ont relevé le même instant à leur horloge, c'est-à-dire que ces événements sont perçus comme simultanés dans ce repère.

§ 3). Intervalles spatio-temporels :

Considérons deux événements A et B ayant lieu en des points distincts de l'espace et repérés dans K par les abscisses x(A) et x(B) en des instants t(A) et t(B). Ils sont repérés dans K' par les abscisses : $x'(A) = [x(A) - vt(A)]/a$ et $x'(B) = [x(B) - vt(B)]/a$. Donc $x'(B) - x'(A) = [x(B) - vt(B) - x(A) + vt(A)]/a = \{[x(B) - x(A)] - v[t(B) - t(A)]\}/a$, ce qu'on peut écrire sous cette forme simplifiée :

$$\boxed{\Delta x'(A,B) = [\Delta x(A,B) - v\Delta t(A,B)]/a}$$

D'autre part : $t'(B) - t'(A) = [t(B) - vx(B)/c^2 - t(A) + vx(A)/c^2]/a = \{[t(B) - t(A)] - (v/c^2)[x(B) - x(A)]\}/a$, ce qu'on peut écrire sous cette forme simplifiée :

$$\boxed{\Delta t'(A,B) = [\Delta t(A,B) - (v/c^2)\Delta x(A,B)]/a}$$

Comme il est évident que $\Delta y'(A,B) = \Delta y(A,B)$ et $\Delta z'(A,B) = \Delta z(A,B)$, nous constatons alors que **la transformation de Lorentz est aussi valide pour les intervalles spatio-temporels**. Il en découle évidemment que **les formules mixtes sont également valides pour ces intervalles**. Nous allons d'ailleurs utiliser ceci dans le chapitre suivant.
Ce qui est particulièrement intéressant avec ces intervalles, c'est que l'initialisation des temps t et t' est, pour eux, sans importance. Les relations de Lorentz sont établies en initialisant t et t' à la valeur zéro en O et O' lorsque ces deux origines sont en coïncidence. Si $t = k \neq 0$ et $t' = k' \neq 0$, en O et O' lorsque O = O', les relations 1 et 4 de Lorentz deviennent fausses, à moins que t et t' n'y soient remplacés par $\tau = t - k$ et $\tau' = t' - k'$. Dans ce cas, les relations appliquées aux intervalles spatio-temporels sont évidemment valides en utilisant $\Delta\tau$ et $\Delta\tau'$. Or, $\Delta\tau = t_2 - k - t_1 + k = \Delta t$ et, de même, $\Delta\tau' = \Delta t'$. Donc **les relations**

appliquées aux intervalles spatio-temporels restent valides avec Δt et $\Delta t'$, quelle que soit l'initialisation choisie pour les temps.
Autre point intéressant : Si K et K' ont simplement leurs axes homologues parallèles et de même sens et non plus nécessairement les axes des abscisses confondus, Δx, $\Delta x'$, Δy, $\Delta y'$, Δz et $\Delta z'$ n'en seront pas changés, donc **les relations de Lorentz et leurs variantes, les relations mixtes, restent valables dans ce cas pour les intervalles spatio-temporels**.

II). Raccourcissement de longueurs et ralentissement d'horloges par la vitesse.

§ 1). Cas des longueurs :

Considérons deux points fixes, distincts, numérotés 1 et 2, sur l'axe des abscisses de K'. La distance qui les sépare est $|x'(2) - x'(1)|$. Au même instant t selon K leurs abscisses dans K sont telles que : $\Delta x(1,2) = a\Delta x'(1,2) + v\Delta t(1,2)$ (relation C). Or $\Delta t(1,2) = 0$ puisque les repérages sont simultanés selon K, donc : $\Delta x(1,2) = a\Delta x'(1,2) \Rightarrow$ **$|\Delta x(1,2)| = a|\Delta x'(1,2)|$**.
Comme a est inférieur à 1, la distance entre ces deux points est inférieure, par une mesure faite selon K, à celle faite selon K'. En particulier, une règle de 1 m allongée sur O'x' a une mesure inférieure à 1 m selon K. Tout se passe comme si la vitesse v de K' par rapport à K raccourcissait les longueurs sur O'x' pour les observateurs liés à K.

Réciproquement, soient deux points fixes (1 et 2) distincts sur Ox. Leurs repérages faits selon K', à un même instant t', donnent :
$\Delta x'(1,2) = a\Delta x(1,2) - v\Delta t'(1,2)$ (relation B). or $\Delta t'(1,2) = 0$. Donc :
$\Delta x'(1,2) = a\Delta x(1,2) \Rightarrow$ **$|\Delta x'(1,2)| = a|\Delta x(1,2)|$**. Les longueurs sur l'axe des abscisses de K paraissent raccourcies aux observateurs liés à K'.
Cette réciprocité des raccourcissements de longueurs est plusieurs fois signalée par Einstein, notamment dans le § 4 de son mémoire de 1905 et dans le petit livre déjà cité. Elle est conforme à l'axiome de symétrie.
Mais la logique nous indique bien évidemment qu'il est impossible que $L < L'$ et également $L' < L$. On doit donc en déduire que ces raccourcissements ne sont qu'apparents et que les longueurs, de 1 m par exemple, mesurées en K et K', se révèleront certainement identiques si K' et K s'immobilisent l'un par rapport à l'autre, en supposant comme négligeables les effets des décélérations. Il est d'ailleurs intéressant, à ce sujet, de faire la remarque suivante : Lorsque des observateurs dans K' mesurent une longueur sur Ox dans K à l'instant t' où les deux points 1 et 2 sont repérés sur O'x', les physiciens sur Ox, avertis par eux des valeurs x'(1) et x'(2), constateront que : $t(1) = [t' + vx'(1)/c^2]/a$ et $t(2) = [t' + vx'(2)/c^2]/a$. Donc, pour eux, les coïncidences x(1)-x'(1) et x(2)-x'(2) ne tombent pas au même instant t. Ils penseront que l'axe O'x' a eu le temps de

glisser entre les deux repérages, d'où cette apparence de raccourcissement observée dans le repère K'.

Cela fait la deuxième fois que nous envisageons un échange d'informations entre les repères K et K'. C'est que, si les longueurs et les temps sont soumis, entre ces deux repères, à la transformation de Lorentz, il semble qu'on peut admettre comme certain qu'une information envoyée de l'un de ces deux repères à l'autre doit être perçue dans cet autre sans déformation de son contenu. Lors de la présence de cosmonautes sur la lune, le contenu des informations entre la terre et ceux-ci n'a eu aucune altération. Le message est retardé par le temps de transit, peut être altéré par des parasites et des blancs, mais son contenu informationnel reste intact si l'on prend les précautions de redondance qui permettent de passer outre aux parasites et aux blancs. Or l'usage (imaginaire le plus souvent) d'un échange d'informations entre les observateurs au repos dans K et ceux au repos dans K' peut aider à mieux comprendre les transformations d'apparences observées d'un repère à l'autre.

§ 2). Cas des temps :

La question du temps est de loin la plus délicate. Il faut dire que depuis toujours, le temps, par son aspect immatériel, irréversible et indépendant de notre volonté, présente un côté quasi métaphysique qu'une certaine imprécision de langage perpétue. En effet, le temps signifie aussi bien « l'instant » où l'on repère quelque chose que la « durée » durant laquelle s'effectuent des phénomènes non instantanés. En mécanique classique on peut mesurer théoriquement le temps en utilisant la trajectoire d'un point matériel en inertie dans un repère galiléen. Etant donné que son mouvement, lorsqu'il existe, est admis comme rectiligne et uniforme, on peut diviser sa trajectoire en segments de longueurs égales, ces segments étant alors considérés comme des *durées* de temps égales et chaque extrémité de ces segments comme des *instants* précis, se succédant consécutivement par incrémentation constante. Mais, dans la réalité physique, un tel point matériel en inertie n'est pas accessible dans l'absolu car notre terre exerce son accélération de pesanteur et aucun mouvement sur un plan horizontal ne peut être garanti comme absolument sans frottements. C'est pourquoi la mesure du temps a été d'abord basée sur l'astronomie. D'autres mouvements ont également paru suffisamment réguliers à nos observations humaines pour permettre un découpage, qu'on a pensé régulier, de ce temps qui s'écoule de façon incessante. Aujourd'hui, on a nettement gagné en précision en utilisant les fréquences émises par certains atomes dans des conditions précises (c'est le cas, notamment, de l'horloge atomique de la région de Francfort, en Allemagne, qui, couplée à un émetteur radio, permet le radiopilotage de nombreuses horloges et montres dans un rayon d'environ 1500 km).

Pour comparer des durées Δt et $\Delta t'$, respectivement dans les repères K et K', étudions ce qui se passe d'un de ces repères à l'autre par ces deux exemples :

1). Considérons une horloge en repos dans K' et émettant un flash lumineux à chaque seconde. L'intervalle de temps entre deux flashes consécutifs, mesuré dans K, est donné par la relation :

$$\Delta t = [\Delta t' + (v/c^2)\Delta x']/a$$

Puisque l'horloge est en repos dans K', $\Delta x' = 0$ et, par conséquent :

$$\mathbf{\Delta t} = \Delta t'/a = \mathbf{1s/a}$$

Nous constatons alors que l'intervalle de temps entre deux flashes consécutifs, mesuré dans K, est plus long que la seconde (car « a », rappelons-le, est plus petit que 1). **Il semble alors que les horloges de K' sont plus lentes que celles de K**.

2). Réciproquement : considérons maintenant une horloge en repos dans K, émettant elle aussi un flash lumineux à chaque seconde. L'intervalle de temps entre deux flashes consécutifs, mesuré dans K', est donné par la relation :

$$\Delta t' = [\Delta t - (v/c^2)\Delta x]/a$$

Puisque l'horloge considérée est en repos dans K, $\Delta x = 0$ et, par conséquent :

$$\mathbf{\Delta t'} = \Delta t/a = \mathbf{1s/a}$$

L'intervalle de temps entre deux flashes consécutifs, mesuré dans K', est plus long que la seconde. **Il semble alors que ce sont les horloges de K qui sont plus lentes que celles de K'**.

Remarquons tout de suite que ces deux résultats sont tout à fait conformes à notre axiome 2 de symétrie.

Mais imaginons que des observateurs liés aux deux repères échangent leurs informations. Nous pouvons concevoir un dialogue de ce genre :

De K à K' :

- Nous constatons que vos horloges battent plus lentement que les nôtres. Et ceci est vrai pour n'importe laquelle de vos horloges. Il semble donc que le temps dans votre système K' s'écoule plus lentement que le nôtre.

Réponse de K' à K :

- Excusez-nous, très chers collègues, mais il nous semble que vous voyez les choses à l'envers. Nos mesures sont formelles : ce sont vos horloges à vous qui sont plus lentes que les nôtres. Le temps, dans votre système, est ralenti par rapport au nôtre.

De K à K' :

- Message bien reçu. Mais nous venons de recommencer nos mesures et confirmons nos conclusions précédentes. Pouvez-vous faire de même ?

De K' à K :

- Nous venons de refaire nos mesures et nos conclusions précédentes sont formellement maintenues !

Que peut-on déduire logiquement de ceci ? Eh bien, que, comme pour les longueurs, il s'agit-là d'un phénomène d'apparences et non d'un vrai ralentissement physique des horloges, car il est impossible qu'une horloge A soit plus lente qu'une horloge B et que l'horloge B soit elle-même plus lente que l'horloge A. Ou alors toute la logique formelle qui régit les démarches scientifiques serait gravement ébranlée. Remarquons d'ailleurs que, dans ces deux cas, ce sont deux horloges différentes d'un même système de référence qui repèrent les flashes d'une seule horloge de l'autre système, car il y a eu déplacement d'un système par rapport à l'autre durant la seconde qui s'est écoulée entre les deux flashes. On peut alors se demander si la méthode adoptée pour synchroniser entre elles les horloges de chaque repère (et que nous avons signalée dans le § 2 du 1er chapitre de ce texte) ne serait pas la cause de cet étrange ralentissement symétrique.

Précisons bien ce que nous appelons « apparences » : Il ne s'agit pas d'hallucinations, ni d'illusions d'optique, c'est-à-dire de phénomènes mettant en cause l'interprétation de nos cerveaux humains, mais bien de phénomènes enregistrables, par exemple par film ou photographie, et mesurables. Pour prendre d'abord un exemple simple, considérons ceci :

Deux personnes, de même taille, s'éloignent l'une de l'autre. Pour chacune d'elles, la personne éloignée apparaîtra plus petite que nature, et d'autant plus petite qu'elle sera plus loin de celle qui l'observe. Il arrivera même un moment, si l'éloignement persiste, où la dimension de chaque personne sera si petite pour l'autre qu'elle pourra passer en dessous du seuil de résolution de notre vue et n'apparaîtra plus alors que sous la forme d'une petite tache. Il ne s'agira pas alors d'une illusion d'optique car une photographie, sur laquelle des mesures précises pourront être faites, rendra parfaitement compte de ceci. En déduira-t-on pour autant que le fait de s'éloigner de quelqu'un nous rapetisse physiquement ? Evidemment non ! Certes, le rapetissement observable de la personne éloignée est depuis longtemps parfaitement expliqué. S'il ne s'agit pas d'une « illusion d'optique », dans le sens habituel de cette expression, il s'agit néanmoins d'un phénomène d'optique qui ne présente plus aucun mystère. Par contre, le ralentissement observé des horloges d'un repère par rapport à l'autre n'a, que je sache, reçu aucune explication claire et incontestable jusqu'ici.

Voici maintenant cet autre exemple, très différent du précédent :

Un train circule en ligne droite, avec une vitesse constante, sur des rails horizontaux. Debout sur un wagon-plateau, une personne laisse tomber une bille sans vitesse initiale par rapport au wagon. Cette bille décrit, par rapport au train, une ligne droite verticale. Mais, pour un observateur immobile sur la voie de chemin de fer, la bille décrit une partie de parabole. Ceci peut être matérialisé en supposant que la bille ait été enduite d'encre et qu'elle ait légèrement frotté deux panneaux blancs, l'un immobile sur le wagon-plateau et l'autre immobile sur le talus. Lorsque le train sera à l'arrêt et que les observateurs se rencontreront, ils

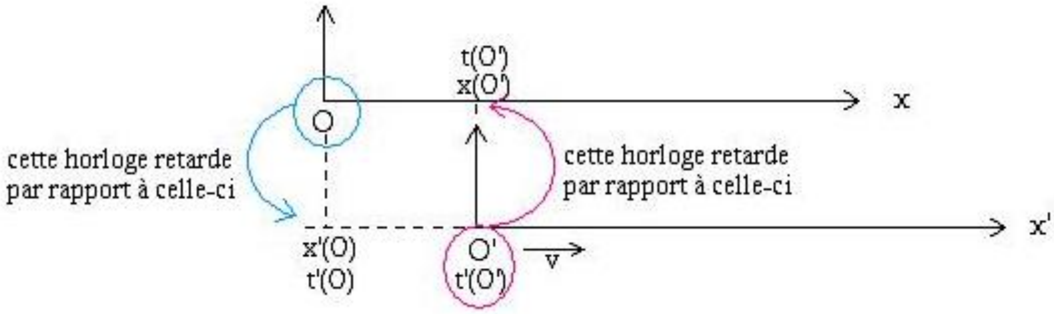
pourront comparer les trajectoires dessinées par la bille sur leurs panneaux blancs respectifs. Ils constateront qu'effectivement la trajectoire est un segment de droite vertical sur le panneau qui était immobile sur le wagon-plateau et une portion de parabole sur le panneau qui était immobile sur le talus. Il n'y a donc pas eu d'illusion d'optique, mais deux « apparences » différentes de la trajectoire de la bille. Ces deux « apparences » différentes sont aussi valables l'une que l'autre, car la trajectoire de cette bille n'a pas de sens dans l'absolu mais n'est définissable que par rapport à un système de coordonnées.
Ce deuxième exemple pourra peut-être surprendre une personne ne connaissant pas la physique, mais certainement pas des physiciens. Que pourront se dire l'un à l'autre nos deux observateurs, s'ils sont physiciens ?

- Celui qui était immobile sur le wagon-plateau pourra dire : « J'ai lâché la bille en ouvrant simplement la main, sans lui imprimer la moindre vitesse initiale. Il me semble tout à fait naturel, étant donné ce que je sais, que sa trajectoire soit pour moi un segment de droite vertical ».
- Celui qui était immobile sur le talus pourra dire : « La bille ayant été dans votre main, et votre main entraînée avec une certaine vitesse, comme tout votre corps, par le train en mouvement, j'ai vu tomber cette bille avec une certaine vitesse initiale horizontale et il est donc tout à fait naturel, étant donné ce que je sais, que sa trajectoire soit pour moi parabolique ».

C'est-à-dire que nos deux observateurs auront, en fait, analysé des phénomènes **différents** : l'un, une chute sans vitesse initiale, l'autre, une chute avec vitesse initiale. Que les deux trajectoires soient différentes n'a donc rien de choquant, puisqu'on peut les considérer comme deux réalités différentes découlant de deux phénomènes différents. Par contre, ce qui surprend dans le cas des ralentissements mesurés des horloges d'un repère par rapport à celles de l'autre, est que les deux observations se font dans des conditions totalement identiques. Or le retard ou l'avance sont ce qu'on appelle en mathématiques des relations d'ordre, lesquelles sont antisymétriques.

C'est pourquoi il me semble que le ralentissement des horloges de chacun des deux repères K et K', observées de l'autre repère, est un phénomène d'apparence du même type que le rapetissement d'une personne qui s'éloigne de l'observateur et non du type de la chute de la bille. C'est, à mon avis, la seule interprétation qui permet de respecter la logique formelle, la logique qui permet de faire des mathématiques et de la physique. Et nous verrons par la suite que cette interprétation ne s'oppose pas aux faits expérimentaux dûment constatés et qui confirment le bien-fondé de la relativité restreinte.

Essayons d'approfondir ceci en étudiant le cas simple suivant et en utilisant la notation précise évoquée en fin de § 2 du chapitre I de ce texte :



Lorsque les origines O et O' des repères K et K'sont en coïncidence, les temps t et t', en O et O', sont initialisés à zéro. D'autre part, les horloges du repère K sont synchronisées entre elles par signaux électromagnétiques comme il en a déjà été question. De la même façon, les horloges de K' sont aussi synchronisées entre elles.
A l'instant t, non nul, mesuré dans K, l'horloge à l'origine O' du repère K' indique un temps t'(O') tel que : t'(O') = at(O') – (v/c²)x'(O') (relation J). Comme x'(O') = 0 ⇒ **t'(O') = at(O')**. L'horloge située dans K', à l'origine O', retarde donc par rapport à celle de K située à l'abscisse x(O') et qui coïncide donc avec elle. Comme les horloges de K sont synchronisées entre elles, on pourrait donc penser que l'horloge de K', située en O', retarde par rapport à celle de K, située en O.
Mais nous pouvons également écrire que l'instant t(O), indiqué par l'horloge de K, située en O, est tel que : t(O) = at'(O) + (v/c²)x(O) (relation L). Comme x(O) = 0, nous obtenons : **t(O) = at'(O)**. Il apparaît alors que l'horloge de K, située en O, retarde par rapport à l'horloge de K', située à l'abscisse x'(O) et qui coïncide donc avec elle. Comme les horloges de K' sont synchronisées entre elles, on pourrait donc penser que l'horloge de K, située en O, retarde par rapport à celle de K', située en O', **ce qui est exactement le contraire de ce que nous venions de penser précédemment**.

De ceci nous devons donc conclure qu'il n'est pas valide de comparer les horloges **distantes l'une de l'autre** en O et O' en passant par l'intermédiaire d'autres horloges synchronisées. **Nous avons déjà vu que le synchronisme n'est pas transitif d'un repère à l'autre. Il s'ensuit que le retard, ou l'avance, ne le sont donc pas non plus**. Remarquons en outre que cet exemple montre que si au moins une horloge de K' retarde (à l'instant t mesuré dans K) par rapport à l'horloge de K qui lui est alors en coïncidence spatiale, une autre horloge au moins de K' avance par rapport à l'horloge de K qui lui est en coïncidence spatiale. Il paraît difficile alors de parler d'un quelconque ralentissement du temps d'un repère par rapport à l'autre.

Einstein, dans le § 4 de son mémoire de 1905 (dont on peut retrouver la traduction française ici), évoque ce ralentissement des horloges de K', observées de K, mais sans jamais signaler le ralentissement symétrique des horloges de K, observées de K'. Même impasse sur cette symétrie dans son petit livre déjà cité. Pourquoi ? Certes, Einstein écrit (§ 4 du mémoire de 1905) : « … Il s'ensuit que le temps indiqué par l'horloge (vue du système stationnaire) est ralenti … », mais il ne dit rien d'une horloge du système stationnaire vue du système en mouvement. Pourtant, il a bien envisagé cette symétrie pour le raccourcissement des longueurs. Sauf le respect dû à ce grand savant, je vois dans cette omission surprenante une certaine « roublardise ». Einstein, en effet, s'apprête, là, à sortir du cadre des deux repères galiléens pour envisager des mouvements d'horloges qui ne sont plus d'inertie. Dans ce même § 4, il envisage d'abord une horloge qui parcourt une ligne brisée, puis finalement une courbe fermée, pour aboutir à la conclusion : « … qu'une horloge à l'équateur doit fonctionner plus lentement, d'une très petite différence, qu'une horloge identique située à l'un des pôles, selon des conditions par ailleurs identiques ».

Certes il n'est pas illogique de passer d'un repère galiléen à un autre et d'obtenir ainsi une trajectoire en ligne brisée, ni d'envisager une courbe continue dont on sait qu'on peut généralement l'assimiler, de façon limite, à une ligne brisée dont les segments sont infiniment petits. Mais cette conclusion d'Einstein nécessite alors un axiome supplémentaire que nous allons voir ultérieurement et que ce grand physicien n'a pas explicité ici.

Voici maintenant deux exemples, en apparence contradictoires, dont l'un semble bien infirmer le ralentissement physique du temps par la vitesse relative et l'autre le confirmer (en utilisant toutefois cet axiome supplémentaire, que nous énoncerons alors) :

Premier exemple :

Considérons un repère galiléen K, que nous appellerons « le repère fondamental », et deux autres repères, également galiléens, K' et K'', en translation par rapport à K, par glissement les uns sur les autres des axes des abscisses. Lorsque les origines de ces trois repères sont confondues les temps aux origines sont initialisés à zéro. Supposons en outre que K' ait la vitesse v par rapport à K et K'' la vitesse – v par rapport à K. Ces deux vitesses ayant la même valeur absolue, le coefficient « a » (rappel : $a = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$) est le même entre K et K' et K et K''. D'après l'exemple précédent et en utilisant les mêmes formules, nous obtenons : $t'(O') = at(O')$ et $t''(O'') = at(O'')$. Les horloges de K étant évidemment synchronisées, $t(O') = t(O'')$ et, par conséquent, $t'(O') = t''(O'')$. On pourrait alors dire que les horloges de K' en O' et de K'' en O'' sont également synchronisées. Mais, comme nous avons conclu précédemment que le synchronisme n'est pas transitif d'un repère à l'autre, gardons-nous de cette affirmation hâtive et utilisons plutôt nos échanges imaginaires d'informations entre les observateurs des différents repères. Supposons que les physiciens du repère fondamental K donnent aux physiciens de K' et K'' l'instruction suivante : « Lorsque les horloges qui sont à l'origine de chacun de vos repères K' et K'' indiqueront l'instant τ, veuillez émettre un flash lumineux de ces origines ». Puisque t'(O') = at(O') et t''(O'') = at(O'') $\Rightarrow$ t(O') = t'(O')/a et t(O'') = t''(O'')/a. Donc, à l'instant τ en O' et O'', lorsque les flashes lumineux jailliront, les physiciens de K mesureront les instants :

$$T(O') = \tau/a \quad \text{et} \quad T(O'') = \tau/a,$$

c'est-à-dire que, pour eux, les deux éclairs seront repérés à des instants identiques, donc leur seront simultanés. Ils pourront dire aux physiciens de K' et K'' : « Vous avez envoyé vos éclairs au même instant d'après nos mesures de temps. Selon nous, les horloges qui sont situées aux origines O' et O'' de vos repères sont synchronisées, **et cela quel que soit l'instant τ que nous avons choisi** ». Comme il est admis que les horloges de K égrènent toutes le temps au même rythme, nous devons conclure qu'il en est de même pour celles de O' et O''. Or, les repères K' et K'' ont une vitesse relative l'un par rapport à l'autre (d'une valeur absolue supérieure à v).

Deuxième exemple : Le voyageur de Paul Langevin :

Le physicien français Paul Langevin (1872 – 1946) avait imaginé, après la publication de la théorie de la relativité, l'exemple suivant, appelé depuis « le voyageur de Paul Langevin » ou « les jumeaux de l'espace » :

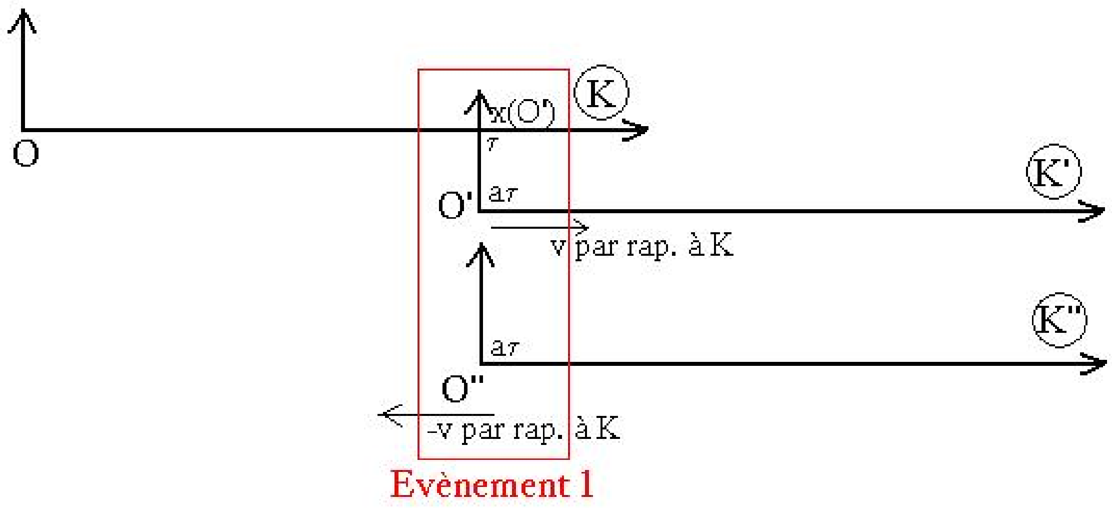
Deux jumeaux vivant sur terre se séparent car l'un d'eux part à travers l'espace dans une fusée dont la vitesse est élevée par rapport à celle de la lumière (tout en lui restant inférieure). Après un certain temps, le jumeau en voyage décide de faire demi-tour et revient sur terre dans sa fusée, à la même vitesse qu'à l'aller. Quand il retrouve la terre et son jumeau qui y est resté, il est nettement plus jeune que ce jumeau car la grande vitesse du voyage a ralenti considérablement le temps qu'il a vécu dans la fusée.

Dès que cette expérience imaginaire a été connue, des voix se sont évidemment élevées pour faire remarquer que, les mouvements étant relatifs (relativité oblige !), on pourrait tout aussi bien affirmer que ce sont les terriens qui ont vécu un temps ralenti par rapport à celui vécu par le voyageur dans sa fusée. Mais Paul langevin a réfuté cette symétrie intenable en signalant que seul le voyageur a eu à subir les accélérations de l'aller et du retour, ce qui détruit la symétrie.

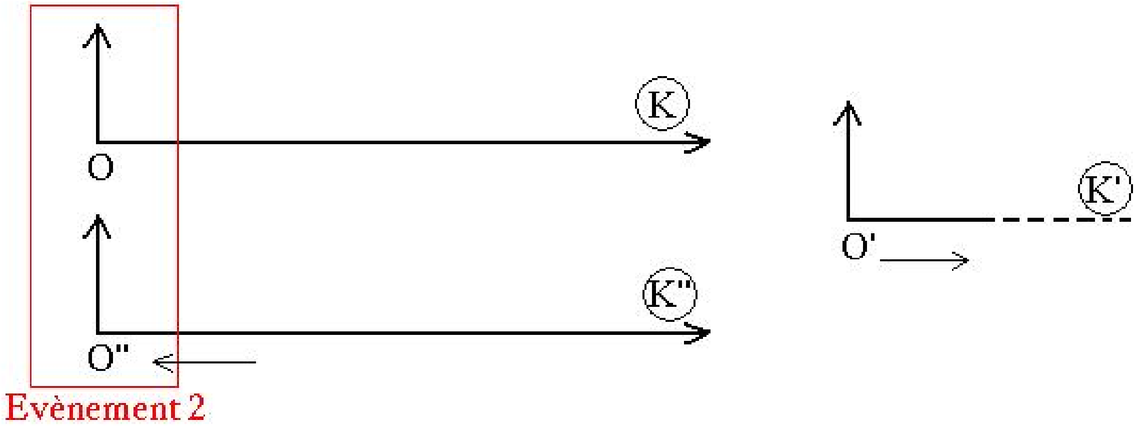
Cet argument a créé une sorte de malaise chez de nombreux scientifiques. En effet, les relations mathématiques de la relativité restreinte ont été établies en posant la symétrie pour principe et en utilisant ce principe à plusieurs reprises pour leur établissement. Si donc il n'y a plus symétrie, nous sortons du cadre de cette théorie et, en toute logique, l'utilisation de ses formules n'est plus justifiable. Cependant, et comme il arrive souvent en physique, on peut décomposer le phénomène étudié en plusieurs séquences, dont chacune, dans cet exemple, respecte la symétrie. Ici, la première séquence est le trajet aller de la fusée en mouvement rectiligne uniforme et la deuxième séquence est son retour, également en mouvement rectiligne uniforme (en considérant le repère Terre-étoiles comme approximativement galiléen). Le problème qui restera en suspens sera celui des accélérations de départ, du retournement et de l'arrêt après le retour. Nous verrons alors comment le résoudre.

Considérons trois repères galiléens, orthonormés, de même métrique, même orientation, K, K' et K'', en translation les uns par rapport aux autres par glissement sur les axes des abscisses. Supposons en outre que ces trois repères soient munis d'horloges identiques, respectivement synchronisées entre elles dans chacun d'eux.

Le repère K' étant animé d'une vitesse v par rapport à K, les horloges des origines O' et O de ces deux repères sont initialisées à la valeur zéro lorsqu'elles se trouvent confondues. Après une certaine durée, mesurée dans K, l'origine O' de K' a pour abscisse x(O') dans K et se trouve donc en coïncidence avec une horloge de K qui indique le temps τ tel que $v\tau = x(O')$. A cet instant τ en x(O'), l'horloge de K' située en O' indique, elle, l'instant $\tau' = a\tau$. Supposons alors qu'à cet instant τ en x(O'), le repère K'', animé de la vitesse –v par rapport à K, ait son origine O'' confondue avec O' et qu'on en profite pour initialiser l'horloge de O'' à la même valeur que celle qu'indique alors l'horloge de O', c'est-à-dire : $a\tau$. Ceci constitue un événement que nous désignerons par le chiffre 1.



Lorsque le repère K'', poursuivant sa course rétrograde, aura son origine O'' confondue avec O, ce qui constituera l'événement 2, qu'est-ce qu'indiquera l'horloge de O'' ?



Pour répondre à cette question, utilisons la relation (J) appliquée aux intervalles spatio-temporels. Nous pouvons écrire :

$\Delta t''(1,2) = a\Delta t(1, 2) + v\Delta x''(1, 2)/c^2$. Or, $\Delta x''(1, 2) = 0$, ce qui entraîne : $\Delta t''(1, 2) = a\Delta t(1, 2)$. $\Delta t(1,2) = x(O')/v = v\tau/v = \tau = t(2) - t(1) = t(2) - \tau$, ce qui entraîne $t(2) = 2\tau$. D'autre part, $\Delta t''(1, 2) = t''(2) - t''(1) = t''(2) - a\tau = a\Delta t(1, 2) = a\tau$, ce qui entraîne $t''(2) = 2a\tau$. On en déduit que : $\mathbf{t''(2) = at(2)}$.

L'horloge en O'' retarde donc sur celle de O alors qu'elles sont en coïncidence spatiale.

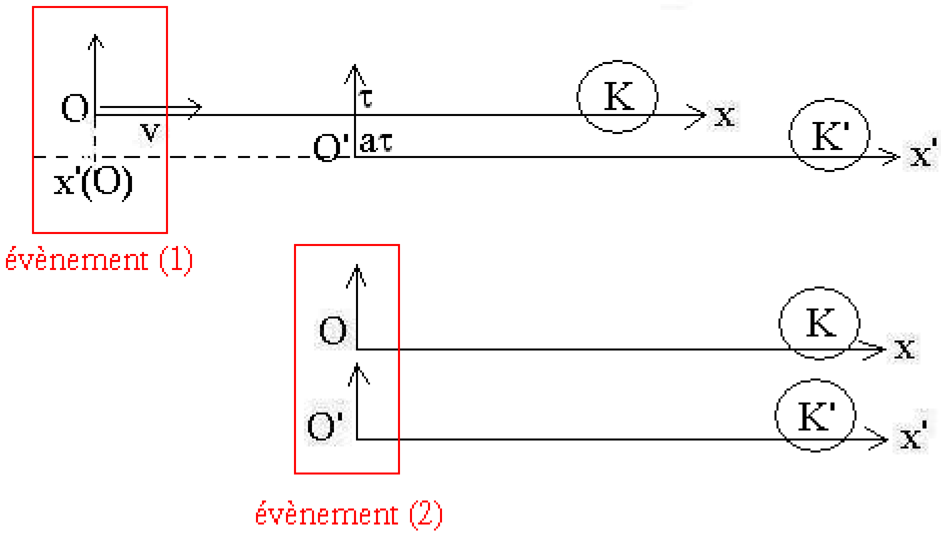
Si maintenant on admet que l'horloge en O' aurait pu être transférée lors de l'événement 1, sans aucun changement de son indication de temps ni modification de son fonctionnement, à l'origine O'' de K'' et ainsi rapportée jusqu'à O, on en conclut qu'elle retardera bien par rapport à celle de O. Et c'est précisément le fait d'admettre que le transfert de l'horloge de K' à K'', qui imprime à cette horloge une accélération, n'a pas modifié son indication de temps ni son rythme qui constitue l'axiome supplémentaire dont nous avons parlé. Il est connu sous le nom anglais de « clock postulate » que l'on peut traduire par *postulat de l'horloge*. Il s'énonce ainsi : **Le rythme d'une horloge accélérée ne dépend pas de son accélération**. (Voir à ce sujet le texte de Don Koks qu'on peut trouver ici). Cet axiome s'étend aussi aux mesures de longueurs et de masses.

Mais un axiome n'est jamais qu'une construction de l'esprit. Qu'en est-il dans notre réalité physique ? De nombreuses expériences (notamment certaines avec des accélérations allant jusqu'à 10^{16} g) ont été faites pour vérifier cela, ainsi que d'autres prévisions, et chaque fois avec davantage de précision. Elles ont confirmé le bien-fondé de cet axiome et validé les prévisions de la théorie de la relativité restreinte. (On peut en consulter sur le site anglophone : http://www.weburbia.demon.co.uk/physics/experiments.html).

Mais, puisque la symétrie est respectée lors de chacune des deux séquences aller et retour, on peut en jouer de façons diverses et faire ainsi resurgir le paradoxe qui avait été objecté dans l'expérience imaginaire du « voyageur de Langevin ».

Voyons cela :

L’accélération de retour ayant été appliquée à K’ et n’ayant donc pas modifié l’indication de l’horloge en O’ (ni celle d’aucune autre horloge de K’), on considère maintenant, non pas que K’ se déplace avec la vitesse –v par rapport à K, mais que c’est K qui se déplace avec la vitesse v par rapport à K’ et on repère les deux évènements (1) et (2) que voici :



En utilisant la relation mixte (J), nous écrivons :
$\Delta t(1,2) = a\Delta t'(1,2) - v\Delta x(1,2)/c^2$. Or, $\Delta x(1,2) = 0 \Rightarrow$ **$\Delta t(1,2) = a\Delta t'(1,2)$**. Cette fois, il apparaît que c’est l’intervalle temporel entre les évènements 1 et 2 , mesuré selon K, qui est inférieur à celui mesuré selon K’. Cette dernière égalité signifie que : $t(2) - t(1) = a[t'(2) - t'(1)]$. Comme nous avons déjà vu (§ 2 du chapitre II, après le 1er schéma de ce chapitre) que : $t(O) = at'(O)$, ce qui s'écrit ici : $t(1) = at'(1)$, on déduit alors que : $t(2) - at'(1) = at'(2) - at'(1) \Rightarrow$ **$t(2) = at'(2)$**. Ainsi sommes-nous amenés à conclure que c’est l’horloge de O qui retarde sur celle de O’, d’où la contradiction avec la conclusion obtenue dans le texte précité et laquelle est confirmée expérimentalement. D’où vient l’erreur ?

Elle vient de la **non-synchronisation des horloges dans le repère K’**. Lorsque ce repère translatait de façon rectiligne avec la vitesse v par rapport à K, ses horloges étaient synchronisées avec celle en O’. Mais, lorsque K’ prend la vitesse –v par rapport à K, ses horloges, dont les indications n’ont pas été modifiées par l’accélération de la transition aller-retour, ne se trouvent plus synchronisées. En effet, deux évènements d’abscisses différentes et simultanés dans K’, lorsque K’ avait la vitesse v par rapport à K, n’apparaîtraient plus simultanés lorsque K’ a la vitesse –v par rapport à K, et bien que les horloges de K’ continueraient à indiquer des instants identiques (et donc faux).

Or, les relations de Lorentz et leurs variantes les relations mixtes, si elles restent valables pour les intervalles spatio-temporels quelle que soit l’initialisation des temps t et t’, ne sont valides que si les horloges respectives de chaque repère sont synchronisées entre elles.

On pourrait alors décider de re-synchroniser les horloges de K' en les « alignant » sur celle en O', ce qui rendrait à nouveau valide l'égalité $\Delta t(1,2) = a\Delta t'(1,2)$. Mais, dans ce cas, l'horloge située en x'(O) et qui indiquait $t'(1) = t(1)/a$, changerait d'indication et, par conséquent, nous ne pourrions plus arriver à l'égalité $t(2) = at'(2)$ qui constituait le paradoxe.

Détaillons cela :

D'après les deux schémas des pages 4 et 5, lorsqu'un repère inverse son sens de déplacement (passage de la vitesse v à – v), il apparaît que la différence horaire entre deux de ses horloges qui repèrent les instants d'évènements simultanés dans le repère considéré comme stationnaire **change de signe lorsqu'on les re-synchronise** (Ceci se vérifie aisément à l'aide de la quatrième relation de la transformation de Lorentz).

Lors de l'événement (1), et alors que K' avait encore la vitesse v par rapport à K, nous avions : $t'(1) = t(1)/a$. En imaginant deux évènements simultanés avec 1, selon K, et se produisant en O et x(O'), nous obtenons $t(1) = \tau$ et ainsi $t'(1) = \tau/a$. La différence horaire, selon K', entre ces 2 évènements simultanés selon K, est alors : $t'(1) - t'(O') = \tau/a - a\tau$

Lorsque K' change de sens de parcours et re-synchronise ses horloges en les alignant sur celle de O', dont l'indication reste inchangée, la différence horaire, selon K', entres ces évènements (simultanés selon K) change de signe, comme nous venons de le signaler plus haut, et par conséquent :

$$t'(1) - t'(O') = a\tau - \tau/a \Leftrightarrow t'(1) - a\tau = a\tau - \tau/a \Leftrightarrow \mathbf{t'(1) = 2a\tau - \tau/a}.$$

D'autre part, la durée du retour de O' à O est, selon K, égale à $x(O')/v = v\tau/v = \tau$, ce qui signifie : $\Delta t(1,2) = \tau$.

Les horloges de K' étant donc à nouveau synchronisées, on peut utiliser la relation mixte (J) en considérant que K translate avec la vitesse v par rapport à K' et ainsi : $\Delta t(1,2) = a\Delta t'(1,2) - v\Delta x(1,2)/c^2$. Or $\Delta x(1,2) = 0$, ce qui entraîne :

$$\Delta t(1,2) = a\Delta t'(1,2) \Leftrightarrow \tau = a[t'(2) - t'(1)] \Leftrightarrow \tau = at'(2) - 2a^2\tau + \tau$$
$$\Leftrightarrow at'(2) = 2a^2\tau \Leftrightarrow \mathbf{t'(2) = 2a\tau}.$$ Or $t(2) = \Delta t(1,2) + t(1) = 2\tau$.

Donc $\boxed{\mathbf{t'(2) = at(2)}}$.

C'est donc bien l'horloge de O' qui retarde par rapport à celle de O lorsqu'elles se retrouvent en coïncidence spatiale.

Dans l'exemple précédent la question du changement de synchronisation des horloges de K', après la transition aller-retour, ne se posait pas, car nous ne nous y occupions que de l'horloge située en O'' ; quant aux horloges de K, elles restaient évidemment synchronisées entre elles puisque K demeurait constamment galiléen.

Remarquons que ce dernier exemple diffère d'un précédent (et semble le contredire) parce qu'il y a une **rupture de symétrie**. L'horloge qui part dans le système K', et revient, utilise deux repères galiléens, en mouvement l'un par rapport à l'autre, tandis que les horloges de K restent en repos dans un seul repère. (C'est ce qui se passe pour le « voyageur de Langevin »).

Lorsque Einstein a envisagé une horloge décrivant un polygone pour revenir à son point de départ (§ 4 de son mémoire de 1905), il a ainsi fait changer son horloge plusieurs fois de repère galiléen d'où la rupture de symétrie entre l'horloge en mouvement et celle considérée comme immobile. Mais cette rupture ne peut être intégrée dans la théorie de la relativité restreinte, laquelle a été établie en supposant la symétrie, qu'en vertu du *postulat de l'horloge*.

Notre dernier exemple, vérifié par l'expérience, est évidemment surprenant. Ainsi donc, deux horloges de fonctionnements identiques, qui ont été synchronisées lorsqu'elles étaient une première fois en coïncidence spatiale, ne sont plus synchronisées lorsqu'elles se retrouvent à nouveau en coïncidence, c'est-à-dire lorsqu'on peut directement comparer leurs indications de temps sans utiliser de transitivité interdite. Et cela est dû au voyage non symétrique de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Dans le cas du « voyageur de Langevin », le jumeau qui a voyagé se retrouve plus jeune que son frère lorsqu'il le rejoint, ce qui signifie évidemment que son frère se trouve plus âgé que lui. On peut alors considérer que le jumeau voyageur se retrouve , à son retour, dans le *futur* de son frère. Mais, comme lui-même a un peu vieilli, on ne peut pas dire que son frère se retrouve dans son *passé* à lui.

Il n'est pas d'exemple, dans la relativité restreinte, où l'on puisse remonter dans le passé.

III). Composition des vitesses et vitesse limite :

§ 1). Composition des vitesses :

En reprenant nos deux repères K et K' de départ (K' ayant la vitesse v par rapport à K), lorsqu'un corps, ou une onde, se déplace dans K', sur l'axe des abscisses, avec une vitesse w, quelle est sa vitesse par rapport à K ? En mécanique classique (d'après les relations de Galilée), nous savons qu'elle est égale à v + w. Mais, d'après la relativité restreinte, la loi d'addition des vitesses n'est pas la loi de Galilée. En effet : Considérons un mobile se déplaçant sur l'axe O'x' du repère K' avec une vitesse w mesurée dans ce repère. Nous avons alors : dx'/dt' = w. En utilisant les relations 1 et 4 de la transformation de Lorentz appliquées aux intervalles spatio-temporels, nous pouvons écrire :

$$dx' = (dx - vdt)/a \quad \text{et} \quad dt' = (dt - vdx/c^2)/a, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$dx'/dt' = w = (dx - vdt)/(dt - vdx/c^2) \Leftrightarrow wdt - (vw/c^2)dx = dx - vdt \Leftrightarrow$$

$$wdt + vdt = dx + (vw/c^2)dx \Leftrightarrow (w + v)dt = (1 + vw/c^2)dx \Leftrightarrow$$

$$\boxed{dx/dt = (w + v)/(1 + vw/c^2)}$$

La vitesse du mobile, mesurée dans K, est légèrement inférieure à la somme des deux vitesses w et v.
On peut remarquer à ce sujet que, si l'on remplace, dans cette formule, w par c le résultat est encore c, ce qui est en accord avec notre axiome 5 d'invariance de la vitesse de la lumière d'un repère galiléen à un autre.

§ 2). Accélérations comparées et vitesse limite :

En considérant toujours nos deux repères galiléens K et K' étudions l'accélération qu'une masse ponctuelle « m », animée d'une vitesse positive V par rapport à K', colinéaire à l'axe des abscisses, subit par rapport à K lorsque on la soumet à une accélération positive γ' selon K', elle aussi colinéaire à l'axe des abscisses.
Si m a initialement la vitesse V par rapport à K', sa vitesse par rapport à K est elle aussi colinéaire à Ox et égale à $W = (V + v)/(1+ vV/c^2)$ selon la formule établie précédemment. Par simplicité, désignons par « b » l'expression $1+vV/c^2$, donc $W = (V + v)/b$.
L'accélération γ que subit alors m par rapport à K est aussi colinéaire à Ox et est égale à $\gamma = dW/dt = (dW/dt')(dt'/dt)$. Or $dt' = adt - vdx'/c^2$ (relation mixte J où $a = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$) et $dx'/dt' = V \Leftrightarrow dx' = Vdt' \Rightarrow dt' = adt - vVdt'/c^2 \Leftrightarrow$
$dt' + vVdt'/c^2 = adt \Leftrightarrow (1 + vV/c^2)dt' = adt \Leftrightarrow bdt' = adt \Leftrightarrow dt'/dt = a/b$.
Donc $\gamma = (dW/dt')(a/b)$.

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{\frac{dV}{dt'}b - (V + v)\frac{v\,dV}{c^2dt'}}{b^2} = \frac{\gamma' b - \frac{V + v}{c^2}v\gamma'}{b^2}$$

$$= \frac{\left(b - \frac{V + v}{c^2}v\right)\gamma'}{b^2}$$

Or $b - (V + v)\,v/c^2 = 1 + Vv/c^2 - Vv/c^2 - v^2/c^2 = 1 - v^2/c^2 = a^2$
$\Rightarrow dW/dt' = (a^2/b^2)\gamma' \Rightarrow dW/dt = (a^2/b^2)\gamma'(a/b) = (a^3/b^3)\,\gamma'$. Donc :

$$\boxed{\gamma = (a^3/b^3)\,\gamma'}$$

γ est positive dans ce cas puisque nous avons choisi v, V et γ' positifs.

Remarquons que plus « m » accroît sa vitesse V par rapport à K' et plus b, qui est égal à $1+vV/c^2$, devient grand, donc le rapport a^3/b^3 devient petit, c'est-à-dire que pour une même accélération γ', **γ diminue comme s'il devenait de plus en plus difficile d'accélérer m par rapport à K lorsque sa vitesse grandit par rapport à K' (et donc aussi par rapport à K puisque γ est positive)**.
Si m est initialement en repos dans K' (donc V = 0), b = 1 et alors $\gamma = a^3\gamma'$. Déjà là γ est plus petite que γ' car a < 1 et donc $a^3 \ll 1$. Et plus v sera grande, plus γ sera petite par rapport à γ'. Si v tend vers c, a^3 tend vers 0 et donc γ aussi pour un γ' fini. Il devient donc impossible d'accélérer davantage m par rapport à K. « c » apparaît alors comme la vitesse limite que peut prendre m dans le repère K. Et cette limite ne peut être atteinte car alors « a » serait nul, or nous avons montré dans la première étape de la démonstration de la transformation de Lorentz que ce n'est pas possible en vertu de l'axiome 3 concernant la coïncidence spatio-temporelle. On en déduit donc qu'un corps matériel ne peut jamais atteindre la vitesse de la lumière.

*
*   *

De tout ce qui vient d'être écrit dans ce texte assez long et pourtant incomplet, le lecteur n'aura certainement pas manqué de remarquer que, malgré la simplicité des relations qui composent la transformation de Lorentz, lesquelles sont mathématiquement accessibles à un élève de troisième de nos collèges français, la théorie de la relativité restreinte est d'une très grande complexité. Jouer avec ses formules de base est simple, mais saisir leur interprétation et pouvoir lever les paradoxes qui ne manquent pas de surgir ici ou là n'est pas chose facile.

*
*   *