ETUDE DU SYSTEME D'EQUATIONS SUIVANT (dans l'ensemble des réels)

$$\begin{array}{ll}(1) & \\ (2) & \\ (3) & \end{array}\left\{\begin{array}{l}xy = A \\ xz = B \\ yz = C\end{array}\right. \quad A,B,C \text{ sont des constantes données.}$$

Il s'agit d'un système de 3 équations à 3 inconnues, lesquelles ne sont pas linéaires et l'étude de ce système est rarement développée dans la littérature mathématique.

§ 1). Ce système est-il possible et, si oui, est-il déterminé ?

Conditions de possibilité :

Tout d'abord, remarquons que le produit membre à membre de ces 3 équations donne : $x^2y^2z^2 = ABC$. Comme $x^2y^2z^2$ est nécessairement positif (au sens large) le produit ABC doit l'être aussi.

Si l'une des constantes est nulle, ceci implique qu'au moins l'une des inconnues est nulle et, comme chaque inconnue intervient dans deux équations, il est nécessaire qu'au moins l'une des deux autres constantes soit nulle pour que le système soit possible.

Ces conditions sont-elles suffisantes ?

Nous verrons que, la condition $ABC > 0$ étant respectée, on peut trouver les valeurs de x, y, z dans tous les cas. On peut donc affirmer que **ce système est possible si $ABC > 0$**.

Maintenant, dans le cas où $ABC = 0$, nous avons déjà vu que la nullité d'une des 3 constantes implique nécessairement la nullité d'au moins l'une des 2 autres pour rendre le système possible.

- Si les trois sont nulles, ceci implique que deux inconnues sont nulles et la troisième peut prendre n'importe quelle valeur arbitraire (y compris 0). Le système est donc possible (mais indéterminé).
- Si seulement deux de ces constantes sont nulles, ce qui implique que l'inconnue qui est présente dans les 2 équations concernées est nulle et

les deux autres non, il n'y a plus qu'une équation à satisfaire, celle où se trouvent les 2 inconnues non nulles, par exemple $xy = A$, et il existe alors une infinité de solutions possibles, avec pour seule contrainte une relation hyperbolique entre les deux inconnues non nulles (par exemple : $y = A/x$, et dans ce cas les solutions sont $(x ; A/x ; 0)$). Mais là encore le système est possible (quoique indéterminé).

Conclusion : **Le système étudié est possible si et seulement si ABC strictement positif, ou ABC = 0 avec au moins deux constantes nulles**.

Conditions de détermination :

Dans le cas général où $ABC > 0$: Aucune des 3 inconnues ne peut être nulle. Peut-il y avoir plusieurs solutions ?
Supposons qu'il en existe au moins deux : $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Posons $y_2/y_1 = k$ (k étant un réel non nul). Alors $y_2 = ky_1$. Mais dans ce cas, il faut et il suffit que $x_2 = x_1/k$ pour obtenir l'égalité $x_2y_2 = A$ (en effet, dans ce cas, $x_2y_2 = (x_1/k).ky_1 = x_1y_1 = A$). Or, si x_1 est divisé par k, z_2 doit être égal à z_1 multiplié par k pour obtenir l'égalité $x_2z_2 = B$ (en effet, dans ce cas, $x_2z_2 = (x_1/k).kz_1 = x_1z_1 = B$). Mais si y_1 et z_1 sont multipliés par k, la dernière équation devient : $y_2z_2 = ky_1kz_1 = k^2y_1z_1 = k^2C$.
Si $| k | \neq 1$, alors $k^2C \neq C$ et le triplet $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ n'est pas solution du système. Par contre si $| k | = 1$, c'est-à-dire si $k = \pm 1$, la dernière égalité est vérifiée et $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ est bien solution du système. Plus précisément :

Si $k = 1$: $(x_2 ; y_2 ; z_2) = (x_1 ; y_1 ; z_1)$, donc une seule solution.

Si $k = -1$: $(x_2 ; y_2 ; z_2) = (-x_1 ; -y_1 ; -z_1)$, donc deux solutions et deux seulement.

Remarquons que l'on peut toujours choisir $k = -1$. Par conséquent :

Conclusion générale : **Dans le cas général où ABC > 0, le système est possible, parfaitement déterminé et a deux solutions opposées**.

Dans le cas où ABC = 0, le système est possible mais indéterminé si deux au moins de ses constantes sont nulles, ou impossible si une seule de ses constantes est nulle.

§ 2). Recherche des solutions :

Le cas où $ABC = 0$ ayant déjà été étudié, plaçons-nous dans le cas général où $ABC > 0$. Nous savons déjà que le système a deux solutions opposées.
Du produit membre à membre des équations (1) et (2) nous tirons :
$x^2yz = AB \Leftrightarrow x^2C = AB \Leftrightarrow x^2 = AB/C$. Donc $| x | = \sqrt{(AB/C)}$, ce qui entraîne : $| y | = | A |/| x | = | A |.\sqrt{(C/AB)} = \sqrt{(AC/B)}$ et $| z | = | C |/| y | = | C |.\sqrt{(B/AC)} = \sqrt{(BC/A)}$.

(Remarquons en effet que $ABC > 0 \Rightarrow AB/C > 0$; $AC/B > 0$ et $BC/A > 0$. D'autre part, la valeur absolue de chaque inconnue est égale à la racine carrée du « produit des constantes des équations contenant l'inconnue sur la constante de l'équation ne la contenant pas »).

Quels sont les signes de ces solutions ?

Si $A > 0$; $B > 0$ et $C > 0$, x, y, z sont de même signe. Donc solutions :
$[\sqrt{(AB/C)} ; \sqrt{(AC/B)} ; \sqrt{(BC/A)}]$ et $[-\sqrt{(AB/C)} ; -\sqrt{(AC/B)} ; -\sqrt{(BC/A)}]$
Si $A > 0$; $B < 0$ et $C < 0$, x et y sont de même signe et z de signe contraire. Donc solutions :
$[\sqrt{(AB/C)} ; \sqrt{(AC/B)} ; -\sqrt{(BC/A)}]$ et $[-\sqrt{(AB/C)} ; -\sqrt{(AC/B)} ; \sqrt{(BC/A)}]$
Si $A < 0$; $B < 0$ et $C > 0$, x et y sont de signes contraires et z de même signe que y. Donc solutions :
$[\sqrt{(AB/C)} ; -\sqrt{(AC/B)} ; -\sqrt{(BC/A)}]$ et $[-\sqrt{(AB/C)} ; \sqrt{(AC/B)} ; \sqrt{(BC/A)}]$
Si $A < 0$; $B > 0$ et $C < 0$, x et y sont de signes contraires et z de même signe que x. Donc solutions :
$[\sqrt{(AB/C)} ; -\sqrt{(AC/B)} ; \sqrt{(BC/A)}]$ et $[-\sqrt{(AB/C)} ; \sqrt{(AC/B)} ; -\sqrt{(BC/A)}]$

Exemples numériques :

1) $xy = 6$; $xz = 10$ et $yz = 15$. A, B, C positifs tous les trois, donc x, y, z sont de même signe.
   $|x| = \sqrt{(6.10/15)} = \sqrt{4} = 2$; $|y| = \sqrt{(6.15/10)} = \sqrt{9} = 3$.
   $|z| = \sqrt{(10.15/6)} = \sqrt{25} = 5$. Donc solutions :

$$(2 ; 3 ; 5) \quad \text{et} \quad (-2 ; -3 ; -5)$$

2) $xy = -21$; $xz = 24$ et $yz = -56$. $A < 0$; $B > 0$ et $C < 0$, donc x et y sont de signes contraires et z de même signe que x.
   $|x| = \sqrt{(-24.21/-56)}\ ) = \sqrt{9} = 3$; $|y| = \sqrt{(-21.-56/24)} = \sqrt{49} = 7$.
   $|z| = \sqrt{(24.-56/-21)} = \sqrt{64} = 8$. Donc solutions :

$$(3 ; -7 ; 8) \quad \text{et} \quad (-3 ; 7 ; -8)$$