SUITES DE FIBONACCI ET NOMBRE D'OR

On sait qu'une suite (généralisée) de Léonardo Fibonacci est constituée de nombres entiers positifs (donc appartenant à N) dont chacun, sauf les deux premiers, est égal à la somme de ses deux précédents.

Commençons d'abord cette suite par 1 et 2, ce qui donne :

1, 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , ………… ∞

ce qui se résume par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Cette suite est évidemment croissante. Et on peut faire de telles suites en débutant par n'importe quels nombres naturels, sauf s'il s'agit de deux zéros. Et ces suites, après les premiers éléments qui peuvent faire exception, sont elles aussi croissantes. Or, si dans ces suites, on forme les rapports de chaque élément et de celui qui le précède immédiatement, après les premiers qui peuvent faire exception, on constate que ces rapports tendent rapidement vers une valeur d'environ 1,6. Démontrons-le :

* Considérons la partie infinie d'une telle suite de Fibonacci à partir de la croissance de ses éléments. Les rapports précités sont majorés. En effet :
Soient x et y deux éléments consécutifs de la partie croissante d'une de ces suites, y étant le plus grand des deux. L'élément suivant est $x + y$ et le rapport de cet élément et de son précédent immédiat est $(x + y)/y = x/y + y/y = x/y + 1$. $x/y < 1$ car $x < y$ ce qui entraîne $x/y + 1 < 2$. Donc 2 est un majorant de cet ensemble de rapports.

* Ces rapports sont également minorés. En effet :
$x + y > y$ ce qui entraîne $(x + y)/y > 1$. Donc 1 est un minorant de cet ensemble de rapports.
L'ensemble de ces rapports étant majoré et minoré est donc aussi borné. D'autre part, les suites de Fibonacci étant infinies, démontrons que l'ensemble de ces rapports est lui aussi infini. S'il ne l'était pas, cela signifierait que certains de ces rapports seraient égaux. Considérons alors deux éléments consécutifs « a » et « b » d'une suite de Fibonacci, ainsi que deux autres éléments consécutifs « c » et « d » de cette même suite. S'il advenait que $b/a = d/c$ cela impliquerait que $c/a = d/b$ (permutation des extrêmes dans une proportion) $= \mu$, μ étant un réel strictement positif. [En effet $d/c = \mu b/\mu a = b/a$]. En considérant alors les vecteurs de coordonnées (b, a) et (d, c) on aurait $(d, c) = \mu(b, a)$. Ces deux vecteurs seraient colinéaires.
Or, en utilisant le calcul matriciel, on remarquera que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Et, en généralisant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+k} \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

Pour qu'apparaisse l'égalité (d, c) = μ(b, a) il faudrait que la matrice précédente, de puissance k, soit la matrice scalaire :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Ceci se révèle évidemment impossible. Par conséquent, il n'y aura jamais de rapports égaux et leur ensemble est donc infini. Comme cet ensemble est aussi borné il vérifie le théorème de Bolzano-Weierstrass. Ce théorème est cité dans diverses versions et celle qui s'applique le mieux à ce cas est : **Dans toute partie infinie et bornée de R il existe une suite convergente.**

Si nous considérons donc, dans cette suite convergente des rapports, ceux qui tendent vers la limite et dont deux consécutifs sont tels que :

$(a + b)/b = b/a + \varepsilon$, ε tendant vers zéro, on peut écrire l'équation à la limite

$$(a + b)/b = b/a \iff a/b + 1 = b/a.$$

Désignons b/a par « q », l'équation devient :

$$1/q + 1 = q \iff 1 + q = q^2 \iff q^2 - q - 1 = 0.$$

Cette dernière équation est du second degré et a pour solutions : $(1 + \sqrt{5})/2$ et $(1 - \sqrt{5})/2$. Seule la première est à retenir car q doit nécessairement être positif. La valeur approximative de q est 1,618033 …. (qui est un irrationnel, ce qui signifie qu'aucun des rapports précités ne peut lui être vraiment égal). Il s'agit du fameux **nombre d'or**. On le symbolise généralement par la lettre grecque φ.

Ce nombre est le rapport qu'il y a entre le demi-périmètre d'un rectangle et sa longueur quand il est égal au rapport de la longueur sur la largeur. Tout rectangle possédant cette propriété donne l'impression de proportions particulièrement harmonieuses, d'où cette notion de « nombre d'or ».

Deux remarques « amusantes » concernant les suites de Fibonacci :

1). Si l'on fait les différences entre les termes consécutifs d'une telle suite, on retrouve la même suite (hors les éléments de départ qui peuvent faire exception). Exemple :

1 2 3 5 8 13 21 34 55

1 1 2 3 5 8 13 21

Ceci découle évidemment du protocole de construction de telles suites.

2). En utilisant la relation générique $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ et en la développant, on obtient (dans la mesure où u_n est choisi assez loin dans la suite) :

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = (u_{n-1} + u_{n-2}) + (u_{n-2} + u_{n-3}) = u_{n-1} + 2u_{n-2} + u_{n-3} =$

$(u_{n-2} + u_{n-3}) + 2(u_{n-3} + u_{n-4}) + (u_{n-4} + u_{n-5}) = u_{n-2} + 3u_{n-3} + 3u_{n-4} + u_{n-5}$

$= u_{n-3} + 4u_{n-4} + 6u_{n-5} + 4u_{n-6} + u_{n-7} =$ etc …

Les coefficients des différents termes sont ceux donnés par le triangle arithmétique de Pascal :

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

*

* *