# Deux formules « sérielles » d'intégration

Considérons une fonction f(x) dérivable (donc continue) jusqu'à un ordre n . Cette fonction peut aussi s'écrire 1f(x). En utilisant la relation d'intégration par parties $\int$udv = uv − $\int$vdu et en posant u = f(x) et dv = 1dx, ce qui entraîne du = f'(x)dx et v = x, on obtient : $\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{x}f(x) - \int \mathrm{x}f'(x)\mathrm{dx}$. Si nous posons alors u = f'(x) et dv = xdx, ce qui entraîne du = f "(x)dx et v = $\frac{x^2}{2}$, on obtient : $\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{x}f(x) - \frac{x^2}{2}\mathrm{f'(x)} + \int \frac{x^2}{2}\mathrm{f''(x)dx}$.

En poursuivant cette méthode on aboutit à la formule suivante :

(1) $\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{x}f(x) - \frac{x^2}{2!}\mathrm{f'(x)} + \frac{x^3}{3!}\mathrm{f''(x)}..........+ (-1)^n \frac{1}{n!}\int x^n f^{(n)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

(signes alternés)

Considérons maintenant la fonction $e^x$f(x). Là encore on suppose que f(x) est dérivable jusqu'à l'ordre n. En utilisant à nouveau la relation d'intégration par parties, et en posant u = f(x) et dv = $e^x$dx, ce qui entraîne du = f'(x)dx et v =$e^x$, on obtient : $\int e^x$f(x)dx = $e^x$f(x) - $\int e^x$f'(x)dx. Si nous posons alors u = f'(x) et dv = $e^x$dx, ce qui entraîne du = f "(x)dx et v = $e^x$, on obtient : $\int e^x$f(x)dx = $e^x$f(x) - $e^x$f'(x) + $\int e^x$f "(x)dx.

En poursuivant cette méthode on aboutit à la formule suivante :

(2) $\int e^x\mathrm{f(x)} = e^x\mathrm{f(x)} - e^x\mathrm{f'(x)} + e^x\mathrm{f''(x)}\ ...........+ (-1)^n\int e^x\mathrm{f}^{(n)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}.$

(signes alternés)

La formule (1) peut être intéressante pour intégrer une fonction dont les dérivées successives arrivent à une constante ou à une expression du type a$x^p$.

Exemple : $\int$lnxdx. La première dérivée de lnx est déjà du type a$x^p$ (ici $\frac{1}{x}$), donc :

$\int$lnxdx = xlnx +$(-1)^1\frac{1}{1!}\int x\frac{1}{x}$dx = **xlnx - x + Cte**

La formule (2) peut être intéressante dans le cas d'une fonction f(x) dont les dérivées successives arrivent à une constante ou présentent des retours périodiques.

Exemple : $\int e^x$sinxdx. La dérivée seconde de sinx étant - sinx, on peut alors écrire :

$\int e^x$sinxdx = $e^x$sinx - $e^x$cosx + $(-1)^2\int -e^x$sinxdx

= $e^x$sinx - $e^x$cosx - $\int e^x$sinxdx. Donc :

$\int e^x$sinxdx = $\boldsymbol{\frac{e^x}{2}}$**(sinx - cosx) + Cte**

J. Legout

*

* *