JOUONS UN PEU AVEC LES HORLOGES
(dans le cadre de la relativité restreinte)

§ 1). Dans le texte n° 3 (« Quelques conséquences de la transformation de Lorentz », qu'on peut rappeler ici) se trouve un exemple (dans le § 2 du chapitre II) où une horloge, sur la partie négative de l'axe des abscisses de K', avance par rapport à une horloge de K qui lui est en coïncidence spatiale, tandis qu'une autre horloge de K', celle située en O', retarde par rapport à une horloge de K qui lui est aussi en coïncidence spatiale, ces deux coïncidences étant simultanées selon K. On peut alors se demander s'il n'est pas possible qu'une horloge de K' se trouve indiquer **le même instant** qu'une horloge de K alors qu'elles sont en coïncidence (et hors le cas où les horloges de O et O' sont initialisées à la valeur 0 lorsque O = O').

Remarquons tout de suite que, si un tel cas existe, les abscisses de ces horloges doivent vérifier la relation que voici :
Puisque x' = ax – vt' (relation B) et x = ax' + vt (relation C), si t' = t nous pouvons écrire : x' = ax – vt et x = ax' + vt. En additionnant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons : x' + x = a(x + x') (rappel : $a = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$).
« a » étant donc différent de 1, cette égalité entraîne que x' + x = 0, c'est-à-dire que : **x = -x'**. Les abscisses de ces deux horloges, mesurées dans leurs repères respectifs, doivent donc être de **valeurs opposées**. Ceci est une condition nécessaire. Montrons qu'elle est également une condition suffisante :
Supposons que deux horloges (H) et (H'), respectivement situées sur les axes des abscisses des repères K et K' et ayant leurs abscisses opposées soient en coïncidence à un instant t selon K. L'instant t' indiqué par H' sera tel que :

$$t' = at - vx'/c^2 = at + vx/c^2$$
$$t = at' + vx/c^2$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons :
t' – t = a(t – t'). Puisque a ≠ - 1, nous en déduisons que t' – t = t – t' = 0, c'est-à-dire que : **t' = t**. Conclusion :

> Il est possible que H et H' affichent le même instant lorsqu'elles sont en coïncidence. Pour cela, il faut et il suffit que leurs abscisses respectives soient opposées.

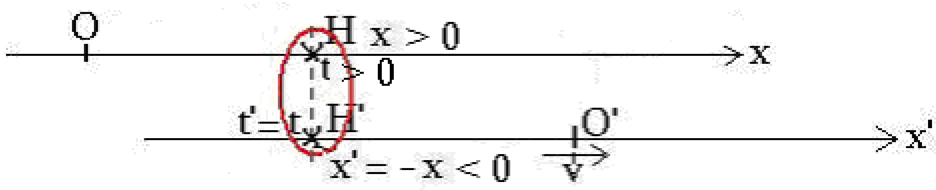
L'instant t, selon K, où a lieu cette coïncidence telle que t' = t peut être calculé ainsi : $t = at' + vx/c^2 = at + vx/c^2 \Leftrightarrow t(1 - a) = vx/c^2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{t = \frac{vx}{c^2}\,\frac{1}{1-a}}$$

On déduit alors de cette relation que :

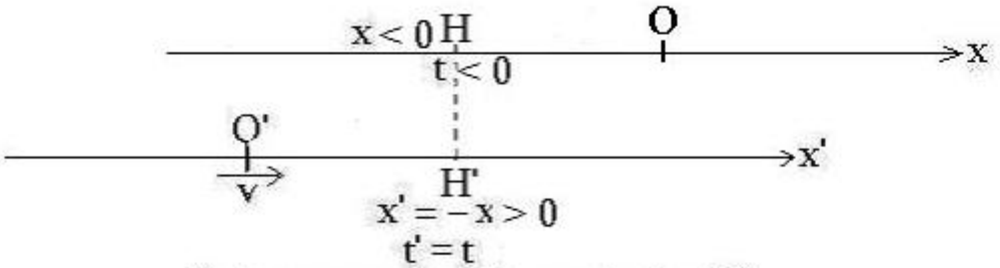
- Si x > 0, alors t > 0 (et donc t' > 0), c'est-à-dire que cet événement (H = H' et t' = t) se produit, selon des observateurs respectivement en repos auprès de H et de H', **après** la coïncidence O' = O.
- Si x < 0, alors t < 0 (et donc t' < 0), c'est-à-dire que cet événement se produit, selon des observateurs respectivement en repos auprès de H et de H', **avant** la coïncidence O' = O.

Ceci peut être illustré par les deux schémas suivants :



(évènement où x(H), t et t' positifs)

et :



(évènement où x(H), t et t' négatifs)

<u>Exemples numériques</u> :

1). Posons v = 200 000 km/s et x = 30 000 km. (c ≈ 300 000 km/s)

$$\mathbf{a} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx (5/9)^{1/2} \approx \mathbf{\sqrt{5}/3}$$

$$\Rightarrow t = vx/c^2(1-a) \approx 2.10^5.3.10^4/9.10^{10}(1-a)$$

$$\Rightarrow \mathbf{t} \approx 1/15(1 - \sqrt{5}/3) \approx \mathbf{261{,}8\ ms}.$$

t' = at – vx'/c² = at + vx/c² ≈ (√5/3)(1/15(1 - √5/3)) + 1/15 ≈ **261,8 ms**.

Ainsi t' = t

(*le point entre des chiffres indique la multiplication selon la coutume française*)

2). Si, en conservant v = 200 000 km/s, nous prenons cette fois x = - 30 000 km, nous obtenons, comme le lecteur pourra le vérifier : t = t' ≈ - 261,8 ms. Donc, là aussi t' = t.

Remarque : La formule qui donne l'instant t en fonction de x et que nous avons établie précédemment contient à la fois « a » et v . Etant donné que « a » est fonction de v, on peut éliminer v de l'expression de la façon suivante :

$$a^2 = 1 - v^2/c^2 \Leftrightarrow v^2/c^2 = 1 - a^2 \Leftrightarrow v = c\sqrt{(1 - a^2)} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\cancel{c}\, x\sqrt{1 - a^2}}{c^{\cancel{2}}(1-a)} = \frac{x\sqrt{1 - a}\,\sqrt{1 + a}}{c\,(1-a)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = \frac{x}{c}\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}$$

§ 2). Pour continuer ce jeu des horloges, demandons-nous maintenant s'il est possible qu'une horloge (H') de K' indique **un temps opposé** à celui d'une horloge (H) de K qui lui est en coïncidence.

Remarquons tout de suite que, si un tel cas existe, les abscisses de ces horloges doivent vérifier la relation que voici :
Puisque $x' = ax - vt'$ (relation B) et $x = ax' + vt$ (relation C), si $t' = - t$, alors $x' = ax + vt$ et $x = ax' + vt$. En soustrayant membre à membre ces deux dernières égalités, nous obtenons : $x' - x = a(x - x')$. Comme « a » est différent de – 1, cette égalité entraîne que : $x' - x = 0$, donc $\mathbf{x' = x}$. Les abscisses de ces deux horloges, mesurées dans leurs repères respectifs, doivent donc être **égales**. Ceci est une condition nécessaire. Montrons qu'elle est également une condition suffisante :
Supposons que deux horloges (H) et (H'), respectivement situées sur les axes des abscisses de K et K' et ayant leur abscisses égales, soient en coïncidence à un instant t selon K. L'instant t' indiqué alors par H' sera tel que :

$$t' = at - vx'/c^2 = at - vx/c^2$$
$$t = at' + vx/c^2$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons :
$t' + t = a(t + t')$. Puisque $a \neq 1$, nous en déduisons que $t' + t = t + t' = 0$, c'est-à-dire que : $t' = - t$. Conclusion :

> Il est possible que H et H' affichent des temps opposés lorsqu'elles sont en coïncidence. Pour cela il faut et il suffit que leurs abscisses respectives soient égales.

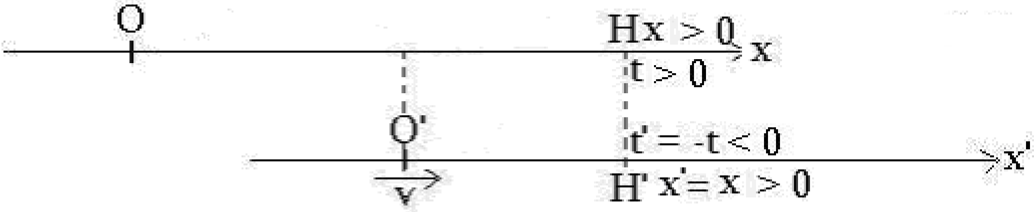
L'instant t, selon K, où a lieu cette coïncidence telle que $t' = - t$ peut être calculé ainsi : $t' = at - vx'/c^2 \Rightarrow - t = at - vx/c^2 \Rightarrow t(1 + a) = vx/c^2 \Rightarrow$

$$\boxed{t = \frac{vx}{c^2}\,\frac{1}{1 + a} = \frac{x}{c}\sqrt{\frac{1 - a}{1 + a}}}$$

Là encore, on déduit de ces relations que :

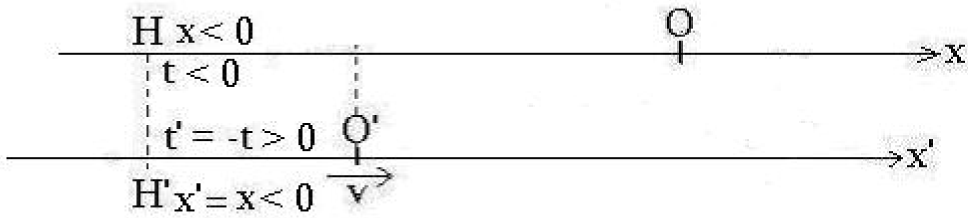
- Si x > 0 alors t > 0 et t’ < 0, c’est-à-dire que cet événement se produit **après**, selon un observateur en repos auprès de H, la coïncidence O’ = O, mais **avant**, selon un observateur en repos auprès de H’, cette coïncidence. **Ceci nous montre que les notions « avant » et « après » sont relatives, tout comme la simultanéité**.
- Si x < 0 alors t < 0 et t’ > 0, c’est-à-dire que cet événement se produit **avant**, selon un observateur en repos auprès de H, la coïncidence O’ = O, mais **après**, selon un observateur en repos auprès de H’, cette coïncidence.

Ceci peut être illustré par les deux schémas suivants :



(évènement, vu de K, où x(H) et t positifs)

et :



(évènement, vu de K, où x(H) et t négatifs)

<u>Exemples numériques</u> :

1). Posons v = 200 000 km/s et x = - 30 000 km. (c ≈ 300 000 km/s)

$$a \approx \sqrt{5}/3 \text{ et } \mathbf{t} = vx/c^2(1 + a) \approx - 2.10^5.3.10^4/9.10^{10}(1 + \sqrt{5}/3) \approx - 1/15(1 + \sqrt{5}/3) \Rightarrow$$

$$\mathbf{t \approx - 38{,}197\ ms}.$$

t’ = at – vx’/c² = at – vx/c² ≈ (√5/3)(- 1/15(1 + √5/3)) + 1/15 ≈ **38,197 ms**.

Ainsi t’ = - t

2). Si, en conservant v = 200 000 km/s, nous prenons cette fois x = 30 000 km, nous obtenons, comme le lecteur pourra le vérifier : t ≈ 38,197 ms et t’ ≈-38,197 ms. Donc, là aussi, t’ = - t.

§ 3). Généralisons ces deux cas en nous demandant maintenant s'il est possible qu'une horloge H', sur l'axe des abscisses de K', puisse indiquer un temps t' = λ fois le temps t indiqué par une horloge H, sur l'axe des abscisses de K, et qui lui est en coïncidence.

Remarquons que, si un tel cas existe, les abscisses de ces horloges doivent vérifier la relation que voici :

$$x' = ax - vt' = ax - \lambda vt$$
$$x = ax' + vt$$

Multiplions la 2ème égalité par λ. Nous obtenons :

$$x' = ax - \lambda vt$$
$$\lambda x = \lambda ax' + \lambda vt$$

Additionnons membre à membre ces deux dernières égalités :

$$x' + \lambda x = ax + \lambda ax' \Leftrightarrow x' - \lambda ax' = ax - \lambda x \Leftrightarrow x'(1 - \lambda a) = x(a - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x' = x\,\frac{a - \lambda}{1 - \lambda a}}$$

(Cette relation n'a de sens que si $1 - \lambda a \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \neq 1/a}$).

Cette relation est une condition nécessaire. Montrons qu'elle est aussi une condition suffisante :

Supposons que deux horloges (H) et (H'), respectivement situées sur les axes des abscisses des repères K et K' et ayant leurs abscisses telles que $x' = x(a - \lambda)/(1 - \lambda a)$, soient en coïncidence à un instant t selon K. l'instant t' alors affiché par H' sera tel que :

$$t' = at - vx'/c^2 = at - vx(a - \lambda)/c^2(1 - \lambda a)$$
$$t = at' + vx/c^2$$

Multiplions la 2ème égalité par $(a - \lambda)/(1 - \lambda a)$, que nous désignerons par « k » pour simplifier. Nous obtenons :

$$t' = at - vxk/c^2$$
$$kt = kat' + vxk/c^2$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières égalités, nous obtenons :

$$t' + kt = at + kat' \Leftrightarrow t' - kat' = at - kt \Leftrightarrow t'(1 - ka) = t(a - k) \Leftrightarrow$$
$$t' = t(a - k)/(1 - ka).$$

En remplaçant maintenant k par sa valeur $(a - \lambda)/(1 - \lambda a)$, on obtient : $\mathbf{t' = \lambda t}$.

Conclusion :

Il est possible que H' affiche un temps égal à λ fois le temps t ($\lambda \neq 1/a$) affiché par H lorsque ces deux horloges sont en coïncidence. Pour cela il faut et il suffit que leurs abscisses vérifient la relation $x' = x(a - \lambda)/(1 - \lambda a)$.

L'instant t, selon K, où a lieu cette coïncidence H' = H telle que $t' = \lambda t$ peut être calculé ainsi :

$$t = at' + vx/c^2 = \lambda at + vx/c^2 \Leftrightarrow t - \lambda at = vx/c^2 \Leftrightarrow t(1 - \lambda a) = vx/c^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{vx}{c^2}\frac{1}{1-\lambda a}}$$

Remarques :

1). Si $\lambda = 1$ ou -1, nous retrouvons pour t les deux expressions obtenues dans les § 1 et 2.

2). Si $\lambda = 0$, $t = vx/c^2$ et $t' = 0$ d'après ce qui précède. Or, selon la 4ème relation de Lorentz : $t' = (t - vx/c^2)/a$, nous obtenons aussi $t' = 0$. Ce cas particulier n'apporte donc pas de contradiction. Lorsqu'il se produit, $x' = ax$, ce qui est confirmé par la relation (B) : $x' = ax - vt'$ pour $t' = 0$. Ce cas correspond au deuxième schéma du § 2 du chapitre I du texte n° 3 (« Quelques conséquences de la tr… », qu'on peut rappeler ici).

Exemple numérique :

Posons $\lambda = 2$ (donc $t' = 2t$), v = 200 000 km/s et x = 30 000 km,

(c ≈ 300 000 km/s) $\Rightarrow vx/c^2 \approx 1/15$ et $a \approx \sqrt{5}/3$. Donc :

$$\mathbf{t} \approx 1/15(1 - 2\sqrt{5}/3) \approx \mathbf{- 135,86\ ms}.$$

$$\mathbf{t'} = (t - vx/c^2)/a \approx (- 0,13586 - 1/15)3/\sqrt{5} \approx \mathbf{- 271,72\ ms}.$$

Nous constatons que t' = 2t

$$\mathbf{x'} = x(a - 2)/(1 - 2a) \approx 3.10^4(\sqrt{5}/3 - 2)/(1 - 2\sqrt{5}/3) \approx \mathbf{76\ 703,49\ km}.$$

*

§ 4). Pour terminer ce jeu des horloges, demandons-nous s'il est possible que, simultanément selon K, plusieurs horloges de K' indiquent les temps $\lambda_1 t$; $\lambda_2 t$ ……..$\lambda_n t$ ($\lambda_i \neq \lambda_j \neq 0$) lorsqu'elles sont en coïncidence avec des horloges de K.

Puisque l'instant t, selon K, de telles coïncidences est donné par la relation : $t = vx/c^2(1 - \lambda a)$, nous pouvons affirmer que **de telles coïncidences sont possibles, dans les conditions indiquées, si et seulement si les horloges** H_1, H_2 …. H_n, **sur l'axe des abscisses de K, ont des abscisses telles que** :

$vx = tc^2(1 - \lambda a)$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = tc^2(1 - \lambda a)/v}$, c'est-à-dire que $x_1 = tc^2(1 - \lambda_1 a)/v$;

$x_2 = tc^2(1 - \lambda_2 a)/v$ ……… $x_n = tc^2(1 - \lambda_n a)/v$.

<u>Exemple numérique</u> :
Posons $t = 2s$, $v = 200\ 000$ km/s, ($c \approx 300\ 000$ km/s) et $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$.
($a \approx \sqrt{5}/3$)

Abscisses des horloges de K, H_1, H_2 et H_3 :

$$\mathbf{x_1} = 2c^2(1 - 2a)/v \approx 18.10^{10}(1 - 2\sqrt{5}/3)/2.10^5 \approx \mathbf{-\ 441\ 640{,}787\ km}$$
$$\mathbf{x_2} = 2c^2(1 - 3a)/v \approx 18.10^{10}(1 - 3\sqrt{5}/3)/2.10^5 \approx \mathbf{-\ 1\ 112\ 461{,}179\ km}$$
$$\mathbf{x_3} = 2c^2(1 - 4a)/v \approx 18.10^{10}(1 - 4\sqrt{5}/3)/2.10^5 \approx \mathbf{-\ 1\ 783\ 281{,}573\ km}$$

Vérification de l'égalité $t' = \lambda t$:

$$\mathbf{t'_1} = (t - vx_1/c^2)/a \approx (2 - 2.10^5 x_1/9.10^{10}).3/\sqrt{5} \approx \quad \mathbf{4s} \quad (= 2t)$$
$$\mathbf{t'_2} = (t - vx_2/c^2)/a \approx (2 - 2.10^5 x_2/9.10^{10}).\ 3/\sqrt{5} \approx \quad \mathbf{6s} \quad (= 3t)$$
$$\mathbf{t'_3} = (t - vx_3/c^2)/a \approx (2 - 2.10^5 x_3/9.10^{10}).\ 3/\sqrt{5} \approx \quad \mathbf{8s} \quad (= 4t)$$

Abscisses des horloges de K' en coïncidence avec H_1, H_2 et H_3 à l'instant $t = 2s$:

Ces abscisses sont données par la formule : $x' = x(a - \lambda)/(1 - \lambda a)$.

$$\mathbf{x'_1} = x_1(a - 2)/(1 - 2a) \approx x_1(\sqrt{5}/3 - 2)/(1 - 2\sqrt{5}/3) \approx \mathbf{-\ 1\ 129\ 179{,}607\ km}$$
$$\mathbf{x'_2} = x_2(a - 3)/(1 - 3a) \approx x_2(\sqrt{5}/3 - 3)/(1 - 3\sqrt{5}/3) \approx \mathbf{-\ 2\ 029\ 179{,}605\ km}$$
$$\mathbf{x'_3} = x_3(a - 4)/(1 - 4a) \approx x_3(\sqrt{5}/3 - 4)/(1 - 4\sqrt{5}/3) \approx \mathbf{-\ 2\ 929\ 179{,}607\ km}$$

*

<u>Postlude</u> :

Ces jeux théoriques avec les horloges – et surtout le dernier – nous montrent une fois de plus qu'on ne peut pas vraiment parler d'un ralentissement du temps dans un repère en translation par rapport à un autre, tant qu'ils restent tous deux galiléens. Ceci, d'ailleurs, est logiquement conforme à l'axiome 2 de symétrie.

Par contre, nous avons vu aussi en fin du chapitre II du texte n° 3 (qu'on peut rappeler ici) le fait étrange que le temps est effectivement ralenti dans l'un des repères lorsque celui-ci rompt la symétrie en revenant à son point de départ par rapport à l'autre. C'est l'une des conséquences les plus excitantes et les plus mystérieuses de la théorie de la relativité restreinte (et du *postulat de l'horloge*).

*

*   *