MATRICES TRIANGULAIRES PAR RAPPORT A LA DIAGONALE SECONDAIRE

On désigne habituellement comme matrices triangulaires celles qui le sont par rapport à la diagonale principale. Or, il est également possible de concevoir des matrices qui apparaissent triangulaires mais par rapport à leur diagonale secondaire.
Exemples, ces deux matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Pour les distinguer des autres matrices triangulaires, et aussi l'une de l'autre, nous nommerons A : *matrice triangulaire supérieure gauche* et B : *matrice triangulaire inférieure droite*.
Pour les matrices triangulaires supérieures gauches les éléments a_{ij} pour lesquels $1 + j > n + 1$ sont nuls (n étant l'ordre de la matrice). Pour les matrices inférieures droites les éléments b_{ij} pour lesquels $i + j < n + 1$ sont nuls.
Pour ces deux types de matrices les éléments a_{ij} et b_{ij} pour lesquels $i + j = n + 1$ sont sur la diagonale secondaire.

I). Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure gauche [(1)] :

Pour calculer la valeur d'un déterminant on peut le développer selon n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

* Développons celui de A selon sa dernière ligne :

$$\det A = a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 = a_{31}(-a_{22}a_{13})$$

$$= \boxed{-a_{31}a_{22}a_{13}}$$

Il apparaît que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure gauche d'ordre 3 est égal à l'opposé du produit des éléments de sa diagonale secondaire. Et, par la même occasion, nous constatons que cette règle est également vraie pour ce type de matrices d'ordre 2.
* Considérons maintenant une matrice triangulaire supérieure gauche d'ordre 4. Sa dernière ligne est a_{41} 0 0 0. Là encore, si nous développons son déterminant selon cette dernière ligne, le cofacteur de a_{41} sera le mineur d'ordre 3 qui lui est associé, semblable au déterminant précédent, multiplié par $(-1)^{4+1} = -1$. Donc ce

déterminant sera le simple produit des éléments de la diagonale secondaire de la matrice.

* Enfin, considérons une matrice triangulaire supérieure gauche d'ordre 5. Sa dernière ligne est a_{51} 0 0 0 0. Là encore, si nous développons son déterminant selon sa dernière ligne, le cofacteur de a_{51} sera le mineur d'ordre 4 qui lui est associé, semblable au déterminant précédent, multiplié par $(-1)^{5+1} = 1$. Donc ce déterminant sera encore le simple produit des éléments de la diagonale secondaire de la matrice.

A partir de ces exemples on peut généraliser ainsi :

- Si une de ces matrices est d'ordre n impair, le premier élément de sa dernière ligne étant a_{n1}, n+1 est pair et, par conséquent, il n'y a pas de changement de signe à appliquer au produit de a_{n1} par son mineur.
- Par contre, si n est pair, le premier élément de sa dernière ligne, a_{n1}, est tel que n+1 est impair et, par conséquent, il faut appliquer un changement de signe au produit de a_{n1} par son mineur.

Or, les matrices d'ordre 2 et 3 ont toutes deux leurs déterminants égaux à l'opposé des produits des éléments de leurs diagonales secondaires. Le déterminant de la matrice d'ordre 4 (n+1 = 5, impair) va revenir au simple produit des éléments de la diagonale secondaire. Et le déterminant de la matrice d'ordre 5 (n+1 = 6, pair) ne va pas appliquer de changement de signe à ce produit (comme le montrent les exemples précédents).

Par récurrence on voit alors apparaître ce qui suit :

- Pour les matrices d'ordres : 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19 …. le déterminant est égal à l'opposé du produit des éléments de leurs diagonales secondaires.
- Pour les matrices d'ordres : 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21 … le déterminant est égal au simple produit des éléments de leurs diagonales secondaires.

Peut-on résumer cela par une règle simple assez courte ?

La réponse est oui ! : En effet on peut remarquer que les ordres 2, 3, 6, 7, 10, 11 … sont tous congrus à 2 ou 3 modulo 4. Quant aux ordres 4, 5, 8, 9, 12, 13 … ils sont tous congrus à 0 ou 1 modulo 4. D'où :

LEMME :
Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure gauche d'ordre n est égal :

- Au produit des éléments de sa diagonale secondaire si n est congru modulo 4 à 0 ou 1.
- A l'opposé de ce produit si n est congru modulo 4 à 2 ou 3.

II). Déterminant d'une matrice triangulaire inférieure droite :

Prenons par exemple la matrice B citée en début de ce texte. L'intérêt est de développer son déterminant selon sa première ligne :

$$\det B = 0 - 0 + (-1)^{1+3}\ b_{13} \begin{vmatrix} 0 & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = b_{13}(-b_{31}\, b_{22})$$

$$= \boxed{-b_{13}\, b_{22} b_{31}}$$

Il apparaît que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure droite d'ordre 3 est égal à l'opposé du produit des éléments de sa diagonale secondaire. Et, par la même occasion, nous constatons que cette règle est également vraie pour ce type de matrices d'ordre 2.

* Considérons maintenant une matrice triangulaire inférieure droite d'ordre 4. Sa première ligne est 0 0 0 b_{14}. Là encore si nous développons son déterminant selon cette première ligne, le cofacteur de b_{14} sera le mineur d'ordre 3 qui lui est associé, semblable au déterminant précédent, multiplié par $(-1)^{1+4} = -1$. Donc ce déterminant sera le simple produit des éléments de la diagonale secondaire de la matrice.

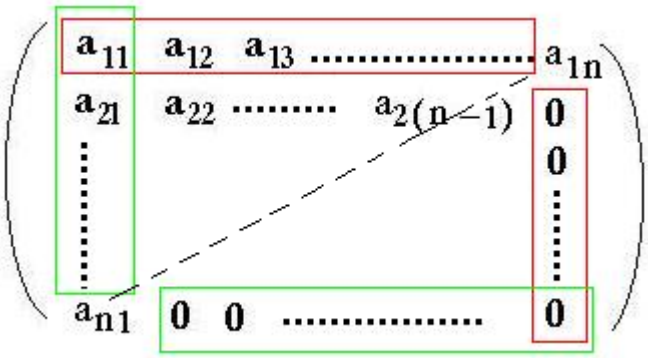
Ces deux exemples suffisent à nous faire comprendre que le principe général est le même pour ce type de matrices que pour celles triangulaires supérieures gauches. En effet, dans ces dernières, l'élément de la dernière ligne « agissant » dans le calcul du déterminant est a_{n1}, alors que dans les matrices triangulaires inférieures droites l'élément de la première ligne « agissant » dans le calcul du déterminant est b_{1n}. Or n+1 = 1+n, d'où le lemme valable pour les matrices triangulaires supérieures gauches l'est aussi pour les matrices triangulaires inférieures droites. Par conséquent :

THEOREME :
Le déterminant d'une matrice triangulaire selon sa diagonale secondaire et d'ordre n est égal :

- Au produit des éléments de sa diagonale secondaire si n est congru modulo 4 à 0 ou 1.
- A l'opposé de ce produit si n est congru modulo 4 à 2 ou 3.

III). Comatrice d'une matrice triangulaire supérieure gauche (compactage des mineurs) :

Soit cette matrice d'ordre n (fini) :



- Les cofacteurs des éléments de la première ligne sauf a_{1n} (c-à-d. a_{11}, a_{12}, …..$a_{1(n-1)}$, (encadrement rouge)) sont nuls car les mineurs qui leur sont associés ont une colonne nulle (celle de a_{2n} ,(autre encadrement rouge)).

- Les cofacteurs des éléments de la première colonne sauf a_{n1} (c-à-d.a_{11}, a_{21},….$a_{(n-1)1}$, (encadrement vert)) sont nuls car les mineurs qui leur sont associés ont une ligne nulle (celle de a_{n2} , (autre encadrement vert)).

- Ne nous occupons plus alors que des éléments a_{ij} situés dans la partie triangulaire supérieure et hors des premières ligne et colonne et de la diagonale secondaire. Pour trouver les mineurs associés à chacun, on supprime la ligne i et la colonne j.

* Lorsqu'on supprime la ligne i, les lignes suivantes (i+1 ; i+2 ; … n) remontent d'un cran et il reste n-1 lignes.

* Lorsqu'on supprime la colonne j, les colonnes à droite de j se déplacent d'un rang sur la gauche et il reste n-1 colonnes.

Donc le mineur obtenu est un déterminant d'ordre n-1 et triangulaire supérieur gauche.

Sur la ligne i, l'élément a_{ij} avait à sa droite l'élément a_{ik} sur la diagonale secondaire de la matrice. a_{ik} est tel que $i + k = n + 1 \Leftrightarrow k = n + 1 - i$, donc a_{ik} peut s'écrire $a_{i(n + 1 - i)}$. La suppression de la ligne i fait que cet élément disparaît et l'élément en dessous de lui, à savoir $a_{(i+1)(n+1-i)}$ remonte d'un rang. Comme la colonne j est aussi supprimée il se décale d'un rang sur la gauche et prend ainsi position sur la diagonale secondaire du mineur d'ordre $n - 1$. Cet élément $a_{(i+1)(n+1-i)}$ est tel que $i + 1 + n + 1 - i = n + 2$. Il est donc nul. Or le mineur d'ordre $n - 1$ peut être considéré comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure gauche d'ordre $n - 1$. Puisqu'un zéro est sur sa diagonale secondaire, il est nul, conséquence du théorème que nous avons précédemment démontré. Ainsi le cofacteur de cet a_{ij} est nul. Tous les cofacteurs des a_{ij} tels que $i + j < n + 1$ sont donc nuls. D'où :

THEOREME :
La comatrice d'une matrice triangulaire supérieure gauche est une matrice triangulaire inférieure droite (de même ordre).

Qu'en est-il des cofacteurs des éléments de la diagonale secondaire ? Ils sont les a_{ij} tels qu $i + j = n + 1$. Pour les cofacteurs de ces éléments on ne peut pas tenir le raisonnement précédent, car l'élément $a_{(i+1)(n+1-i)}$, étant sur la colonne

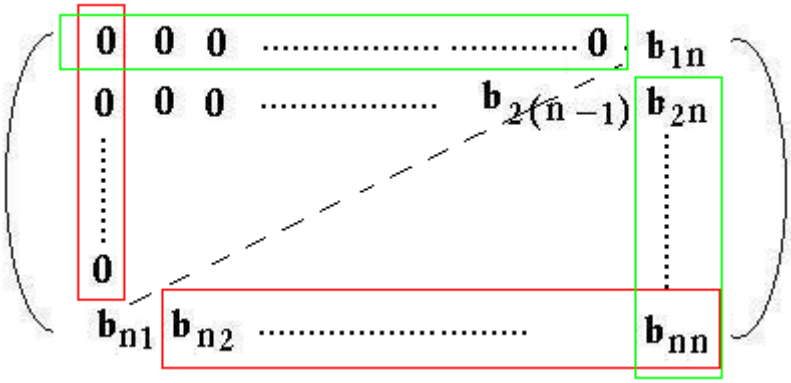
j qui est supprimée (et non à droite d'elle) disparaît lui aussi. En fait le mineur associé est alors compacté de telle façon que les éléments restants de la diagonale secondaire de la matrice se retrouvent sur la diagonale secondaire du mineur. Si aucun d'eux n'est nul le mineur n'est pas nul non plus.

Quant aux éléments en dessous de la diagonale secondaire (que des zéros) leurs cofacteurs ne sont pas nécessairement nuls comme des exemples simples le montrent.

IV). Comatrice d'une matrice triangulaire inférieure droite :

Etant donné qu'une matrice triangulaire inférieure droite est en quelque sorte la symétrique (par rapport à la diagonale secondaire) d'une matrice triangulaire supérieure gauche de même ordre, on peut supposer que sa comatrice sera elle aussi en quelque sorte la symétrique de la comatrice précédente. Mais cette supposition n'est pas une démonstration. Aussi démontrons qu'il en est bien ainsi :

Soit cette matrice d'ordre n (fini) :



- Les cofacteurs des éléments de la dernière ligne sauf b_{n1} (c.à.d. b_{n2}, b_{n3}, ……..b_{nn} (encadrement rouge)) sont nuls car les mineurs qui leur sont associés ont une colonne nulle (autre encadrement rouge).

- Les cofacteurs des éléments de la dernière colonne sauf b_{1n} (c.à.d. b_{2n}, b_{3n}, ……b_{nn} (encadrement vert)) sont nuls car les mineurs qui leur sont associés ont une ligne nulle (autre encadrement vert).

- Ne nous occupons plus alors que des éléments b_{ij} situés dans la partie triangulaire inférieure et hors des dernières colonne et ligne et de la diagonale secondaire. Pour trouver les mineurs associés à chacun on supprime la ligne i et la colonne j.

* Lorsqu'on supprime la ligne i, les lignes précédentes (i-1, i-2, …..1) descendent d'un rang et il reste n-1 lignes.
* Lorsqu'on supprime la colonne j, les colonnes à gauche de j se déplacent d'un rang sur la droite et il reste n-1 colonnes.

Là encore le mineur obtenu est un déterminant d'ordre n-1 mais triangulaire inférieur droit.

Sur la ligne i, l'élément b_{ij} avait à sa gauche l'élément b_{ik} sur la diagonale secondaire de la matrice. b_{ik} est tel que $i + j = n + 1 \Leftrightarrow k = n+1-i$, donc b_{ik} peut s'écrire $b_{i(n+1-i)}$. La suppression de la ligne i fait disparaître cet élément et l'élément au dessus de lui, à savoir $b_{(i-1)(n+1-i)}$ descend d'un rang. Comme la colonne j est aussi supprimée il se décale d'un rang sur la droite et prend ainsi position sur la diagonale secondaire du mineur d'ordre n-1.

Cet élément $b_{(i-1)(n+1-i)}$ est tel que $i - 1 + n + 1 - i = n$. Il est donc nul. Or le déterminant d'ordre n-1 peut être considéré comme le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure droite d'ordre n-1. Puisqu'un zéro est sur sa diagonale secondaire, ce déterminant est nul. Ainsi le cofacteur de b_{ij} est nul. Tous les cofacteurs des b_{ij} tels que $i+j > n+1$ sont donc nuls. D'où :

THEOREME :
La comatrice d'une matrice triangulaire inférieure droite est une matrice triangulaire supérieure gauche (de même ordre).

V). Produit d'une matrice triangulaire supérieure gauche et d'une matrice triangulaire inférieure droite :

* Considérons par exemple le produit de nos deux matrices A et B données en début de ce texte et faisons leur produit :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{13}b_{31} & a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ 0 & 0 & a_{31}b_{13} \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice triangulaire supérieure (classique).

* Commutons ce produit :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{13}a_{31} & 0 & 0 \\ b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{22}a_{22} & 0 \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas nous obtenons une matrice triangulaire inférieure (classique).

Dans le cas général :

Les exemples ci-dessus viennent de montrer que, dans le cas de matrices d'ordre 3, le produit d'une matrice triangulaire supérieure gauche et d'une matrice triangulaire inférieure droite est une matrice triangulaire supérieure (classique). Démontrons que ceci est vrai dans le cas général de matrices d'ordre n (fini) A'et B' :

- La matrice triangulaire supérieure gauche (A') est telle que $a_{ir} = 0$ si $i + r > n + 1 \Leftrightarrow i > n + 1 - r$.

- La matrice triangulaire inférieure droite (B') est telle que $b_{rj} = 0$ si $r + j < n + 1 \Leftrightarrow j < n + 1 - r$.

- La matrice produit (désignons-la par C) sera triangulaire supérieure si elle est telle que $c_{ij} = 0$ pour $i > j$. Or :

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

* Si, dans certains des monômes $a_{ir}b_{rj}$, a_{ir} est tel que $i > n + 1 - r \Rightarrow a_{ir} = 0$ et ces monômes sont nuls.

* Si, par contre, a_{ir} est tel que $i \leq n + 1 - r \Rightarrow a_{ir}$ n'est pas nécessairement nul mais, si $j < i \Rightarrow j < n + 1 - r$, ce qui entraîne $b_{rj} = 0$ et donc $a_{ir}b_{rj} = 0$.

Ainsi la matrice produit (C) est telle que $c_{ij} = 0$ si $i > j$. Elle est donc une matrice triangulaire supérieure. D'où :

THEOREME :
Le produit d'une matrice triangulaire supérieure gauche et d'une matrice triangulaire inférieure droite de même ordre est une matrice triangulaire supérieure (de même ordre).

Il est évident qu'on peut démontrer par le même type de raisonnement que :

THEOREME :
Le produit d'une matrice triangulaire inférieure droite et d'une matrice triangulaire supérieure gauche de même ordre est une matrice triangulaire inférieure (de même ordre).

Par contre, de simples exemples montrent que le produit de deux matrices triangulaires selon leur diagonale secondaire et de même type ne présente pas de caractère particulier, du moins selon cette étude.

VI). Inverse d'une matrice triangulaire selon sa diagonale secondaire :

- Tout d'abord : étant donné que le produit d'une matrice triangulaire supérieure gauche et d'une matrice triangulaire inférieure droite donne une matrice triangulaire supérieure (classique) et que la matrice unité peut être considérée comme une matrice triangulaire supérieure particulière, on peut déjà supposer que la matrice inverse d'une matrice triangulaire supérieure gauche inversible sera une matrice triangulaire inférieure droite.

- Désignons par M la matrice initiale (triangulaire supérieure gauche inversible). Son inverse M^{-1} = (1/dét.M)t(comM). Or, nous savons que comM (comatrice de M) est une matrice triangulaire inférieure droite. Comme, d'autre part, il est clair que la transposition d'une telle matrice ne change pas son type, t(comM), qui est la transposée de comM, est aussi une matrice triangulaire inférieure droite et par conséquent M^{-1} aussi. Donc :

THEOREME :
La matrice inverse d'une matrice triangulaire supérieure gauche inversible est une matrice triangulaire inférieure droite (de même ordre).

- D'autre part, étant donné que M est la matrice inverse de M^{-1}, on peut également conclure que :

THEOREME :
La matrice inverse d'une matrice triangulaire inférieure droite inversible est une matrice triangulaire supérieure gauche (de même ordre).

*

(1) Si l'on retourne verticalement une matrice triangulaire supérieure gauche, on obtient une matrice triangulaire inférieure (classique), pour laquelle le déterminant est égal au produit des éléments de sa diagonale principale. Mais ce retournement équivaut à une inversion « totale » des lignes de la matrice initiale, c'est-à-dire que la ligne 1 devient la ligne n et ainsi de suite : 1 -> n ; 2 -> (n-1) ; 3 -> (n-2) ; ….. ; n -> 1. Cette permutation correspond au nombre d'inversions égal à n(n-1)/2. La signature de cette permutation est donc (-1) à la puissance n(n-1)/2. Et, comme me l'a aimablement fait remarquer Monsieur Richard Gomez à qui j'avais transmis ce texte, le déterminant de la matrice initiale (triangulaire supérieure gauche) est donc celui de la matrice triangulaire inférieure classique multiplié par cette signature.

De cette remarque et du théorème obtenu dans le § I, on peut déduire que l'inversion totale d'une suite de n éléments a pour signature +1 si n est congru modulo 4 à 0 ou 1 et pour signature –1 si n est congru modulo 4 à 2 ou 3. Cette méthode par congruence s'avère plus simple pour trouver la signature d'une inversion totale de n éléments, lorsque n est grand, que l'utilisation de la relation n(n-1)/2. Exemple : n = 135 $\Rightarrow$ 135/4 = 33 et il reste 2 ; Donc la signature de l'inversion totale d'une suite de 135 éléments est –1.

*

* *