CAS DE GROUPES AYANT UN SOUS-GROUPE DONT LE CARDINAL EST LA MOITIE DU LEUR

Soient (G, &) un groupe fini, (H, &) un sous-groupe de (G, &) et § la loi de composition inverse de &.

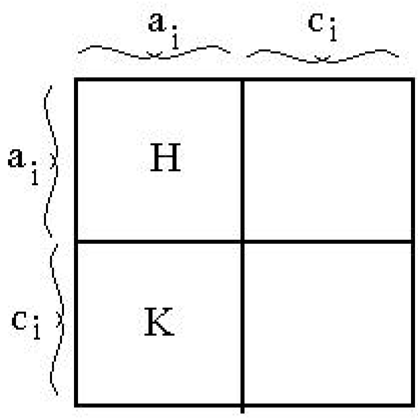
Soient aussi a et c deux éléments de G. Il existe $b \in G$ tel que b&a = c (cf. Propriétés V et VI de « Groupes et propriétés »).
Si $a \in H$ et $c \notin H \Rightarrow b \notin H$ (sinon, H étant stable pour &, c appartiendrait à H, ce qui est contraire à l'hypothèse).

Désignons par K l'ensemble des éléments de G qui n'appartiennent pas à H : K = G – H. Donc $b \in K$.

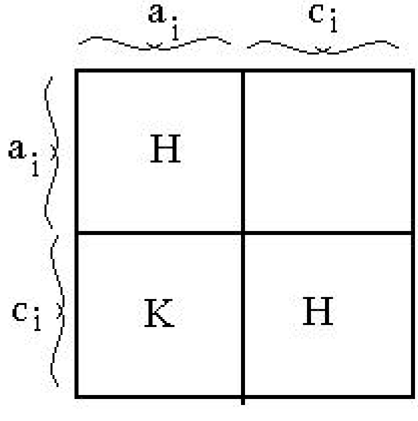
Supposons que Card(K) = Card(H).

$H = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ et $K = \{c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n\}$.

$b_1\&a_1 = c_1$; $b_2\&a_1 = c_2$; … ; $b_n\&a_1 = c_n$. Une loi de groupe étant régulière, $\forall$ b_i et c_i, si $c_i \neq c_j \Rightarrow b_i \neq b_j$. Et comme $b \in K$, les b_i sont donc tous les éléments de K, c'est-à-dire les c_i. Donc $b_i\&a_i = c_i \Leftrightarrow c_k\&a_i = c_i$, ce qu'on peut résumer ainsi : **K&H = K**. Dans une table d'opération, dans laquelle le sous-groupe occupe le coin en haut à gauche, ceci se traduit ainsi :



D'autre part, b&a = c $\Leftrightarrow$ c§a = b $\Leftrightarrow$ a§c = b' $\Leftrightarrow$ b'&c = a. Puisque $b \notin H$, $b' \notin H \Leftrightarrow b' \in K$ et, pour la même raison que précédemment concernant les b_i, les b_i' sont tous les éléments de K, donc $c_j\&c_i = a_k$, ce qu'on peut résumer ainsi : **K&K = H**, d'où la table d'opération évolue ainsi :



Enfin, nous avons établi que K&H = K, K&K = H, et évidemment H&H = H. Que peut-on dire alors de H&K ? Désignons H&K par X.

(K&H)&(H&K) = K&(H&H)&K = (K&H)&K =K&K =H.

Donc (K&H)&X = H. Or K&H = K ⇒ K&X = H. Une loi de groupe étant régulière, on en déduit que X = K, d'où H&K = K et la table d'opération se complète ainsi :

	a_i	c_i
a_i	H	K
c_i	K	H

C'est exactement ce qu'on voit sur les tables d'opération du texte « Jouons avec certains groupes », ainsi que sur la table de Cayley du groupe D8. On peut également voir cela sur la table d'opération des permutations de trois éléments (il y a six permutations dont trois forment un sous-groupe).

*

*   *